

MSG-Hausaufgaben Blatt 17

Abgabe: 04.04.2017

Anastasia Prokudina, Simone Zahn

In der letzten Stunde haben wir uns mit der Fibonacci-Folge beschäftigt, welche die folgende Bildungsvorschrift hat:

$$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Aufgabe 1. Der Goldene Schnitt ist ein Teilungsverhältnis zwischen zwei Längen a und b (mit $a > b$), welches folgende Bedingung erfüllt: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. (\star)

Das Verhältnis $\phi = \frac{a}{b}$ nennen wir den Goldenen Schnitt (oder auch Goldene Zahl).

a) Zeige $\phi = \frac{1}{\phi} + 1$.

Hinweis: Benutze (\star) und forme die linke Seite um.

Gegeben sei ein Rechteck, dessen Seiten (a und b , mit $a > b$) sich wie im Goldenen Schnitt teilen. Ein solches Rechteck nennen wir Goldenes Rechteck. Zeige:

b) Fügt man an die längere Seite ein Quadrat mit derselben Seitenlänge hinzu (siehe Zeichnung), so entsteht wieder ein Goldenes Rechteck.

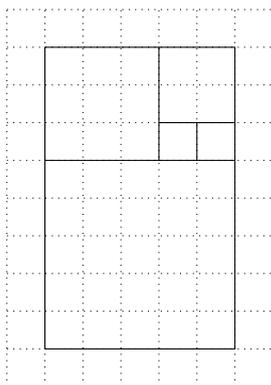
c) Schneidet man ein Quadrat kürzeren Seitenlänge ab, so entsteht wieder ein goldenes Rechteck.



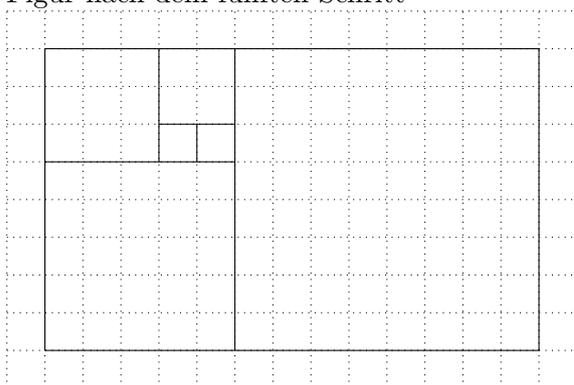
Aufgabe 2. Wir konstruieren eine Figur nach folgendem Schema:

Beginne mit einem Quadrat der Kantenlänge 1 (also der ersten Fibonacci-Zahl F_1). Im 2. Schritt füge rechts davon ein Quadrat der Kantenlänge 1 (also F_2) hinzu. Im dritten Schritt wird darüber ein Quadrat der Kantenlänge 2 ($= F_3$) hinzu gefügt, danach links Quadrat der Kantenlänge 3 ($= F_4$) usw.

Im k ten Schritt hat das neue Quadrat also die Kantenlänge F_k , die Quadrate werden dabei spiralförmig (gegen den Uhrzeigersinn) angeordnet.



Figur nach dem fünften Schritt



Figur nach dem sechsten Schritt

- Was sind die Seitenlängen des so entstehenden Rechtecks nach dem n -ten Schritt?
- Leite daraus die Formel $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ her.
- Zusatz:* Beweise die Formel mit vollständiger Induktion.