Vorlesung/Seminar WS 2005/06

Einführung in das Langlands-Programm
(Zusammenfassung)

26.10.05 Im Kern ist das Langlands-Programm eine Theorie der L-Funktionen.
Die Riemannsche Zeta-Funktion.
Γ-Funktion, Theta-Reihen und ihre Funktionalgleichung, Beweis der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion mit Hilfe einer Integraldarstellung.

02.11.05 Dirichletsche L-Reihen.
Eulerprodukt, Gauß-Summen. Interpolation des Charakters. Integraldarstellung der modifizierten L-Reihe $\Lambda(s,\chi)$.

09.11.05 Anwendungen der L-Reihen auf die Zahlentheorie. Primzahlen in arithmetischen Progressionen.
Grundtatsachen über Bewertungen. Satz von Ostrowski, Primstellen von K, Adelering $\mathbb{A}_K = \bigcup_S \mathbb{A}_S$.

16.11.05 $\mathbb{A} = \Delta K + \mathbb{A}_{V^\infty}$. Starker Approximationssatz, Einbettung $\Delta : K \hookrightarrow \mathbb{A}$ ist diskret und $\mathbb{A}/\Delta K$ ist kompakt. Man zeigt $\Delta K \cap \mathbb{A}_{V^\infty}$ diskret in $\mathbb{A}_{V^\infty}$. Kompaktheit des Faktors $\mathbb{A}/\Delta K$.
Idelegruppe I. Topologie von $I_S = \bigcup_S I^S$. $K^\times$ diskret in I, weil $K^\times \cap I^S$ diskret in I^S. Produktsatz für Hauptidele. Die S-Einheiten und der Dirichletsche Einheitensatz.

22.11.05 Die Tatesche Theorie für GL_1.
Faktortopologie und die Stetigkeit von $\| : C_K \to \mathbb{R}_+^\times$. C_K^1 = Idelklassen der Norm =1, ist eine kompakte Gruppe. Es genügt dazu, den Kern von $\varphi : C_L^1 \twoheadrightarrow Cl_K$ zu untersuchen, weil die Idealklassengruppe endlich ist. Betrachtung von Ker φ führt auf Untersuchungen im Minkowski-Raum.

Grundlagen der harmonischen Analyse (für lokal kompakte abelsche Gruppen). Pontrjaginscher Dualitätssatz. Haarsches Maß und Fouriertransformation. Duales Maß. Selbstduale Gruppen und selbstduale Maße. Die Schwartz-Algebra $\mathcal{S}(G)$ einer lokal kompakten abelschen Gruppe.

30.11.05 Die Schwartz-Algebren $\mathcal{S}(G)$ für die speziell interessierenden Gruppen G. Insbesondere $\mathcal{S}(F^n), \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$. $(\mathbb{A},+)$ ist selbstdual. Das Tamagawa-Maß. Quasicharaktere von C_K bzw. $K_v^\times$.

07.12.05 $X(C_K)$ = komplexe Mannigfaltigkeit der Quasicharaktere. Das Zeta-Integral zu einer Standardfunktion. Konvergenz von Zeta-Integralen. Die Funktionalgleichung der Zeta-Integrale von Tate.

12.12.05 Zu Hecke-Charakter $\chi \in X(C)$ betrachte $L_S(w) = L_S(s,\chi)$ auf der Zusammenhangskomponente von χ, wobei S eine Ausnahmemenge ist. Einbauen von $L_S(w)$ als Faktor eines geeigneten Zetaintegrals $Z(w,f)$ für eine Standardfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$.

Das f hängt nur ab von $\chi|_{C_K^1} = w|_{C_K^1}$. Damit Zurückführung der Heckeschen Funktionalgleichung auf die Tatesche Funktionalgleichung.

17.12.05 Begriff des Größencharakters = Charakter auf einer Idealgruppe J^m, der sich *stetig* zu einem Hecke-Charakter fortsetzt. Die Fortsetzung, falls sie existiert, ist eindeutig.

02.01.06 $\chi \in X(C_K^1) \mapsto \phi_\chi$ = Standardfunktion auf $\mathbb{A}_K$. Für $Z(w, \phi_\chi)$ gilt der Tatesche Hauptsatz. Beschränke w auf Z_χ = die durch χ bestimmte Zusammenhangskomponente in $X(C_K)$. Und gehe von Hecke-Charakter zu einem Größencharakter. Dann kommt man von der Tate-Funktionalgleichung auf die Hecke-Funktionalgleichung.

Kapitel 2 Modulformen als automorphe Formen für die Gruppe GL_2.
Einführung der Gruppe $G(\mathbb{A})$ für $G = GL_n$.

11.01.06 $GL_n(\mathbb{A})$ als eingeschränktes direktes Produkt. Ein Vergleich mit $SL_2(\mathbb{R})$ im Fall $n = 2$. Die rechtsreguläre Darstellung von $GL_n(\mathbb{A})$. Die Räume $L^2(n, w)$ bzw. $L_0^2(n, w)$.

18.01.06 Ausdehnung der Aktion von G zu einer Aktion der Gruppenalgebra. Selbstadjungierte kompakte Operatoren auf dem Hilbertraum L_0^2. Zerlegung dieses Raumes in eine Hilbert-direkte Summe. Die automorphen Darstellungen leben auf kleineren Räumen, welche keine Hilbert-Räume sind. Definition automorpher Formen für die Gruppe $GL_n(\mathbb{A})$.

22.01.06 Automorphe Formen/Wiederholung.
Struktur des Raumes $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n, w, F)$. Der Raum $\mathcal{A}_0(n, w, F)$ ist eine zulässige Darstellung bezüglich $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty) \times G(\mathbb{A}_f)$.

01.02.06 Zerlegung von Darstellungen in Tensorprodukte. (Die Verbindung von lokaler und globaler Theorie).
Glatte Darstellungen von G und nichtausgeartete $\mathcal{H}(G)$-Moduln.
$\mathcal{H}(G, K) = \varepsilon_K * \mathcal{H}(G) * \varepsilon_K$. Irreduzibilitätskriterium für glatte G-Moduln. Der Fall, wenn $\mathcal{H}(G; K)$ kommutativ ist. **Satz 1:** Über das direkte Produkt lokal proendlicher Gruppen.

08.02.06 Übergang von Gruppen zu I-Algebren. Das Tensorprodukt in der Kategorie der I-Algebren. Zwei Hilfssätze über Idempotente $e \leq f$ im Ring R mit Konsequenzen für R-Moduln. Im Fall $H = \bigcup_e eHe$ sind H-Moduln als induktive Limites von eHe-Moduln gegeben.

15.02.06 Übergang zu unendlichen Tensorprodukten. Das eingeschränkte Tensorprodukt von Vektorräumen und von I-Algebren. Als Kombination das eingeschränkte Tensorprodukt von Moduln. Der **Satz 2** über einfache Moduln in diesem Kontext. Zurückführung auf den Fall endlich vieler Faktoren. Begriff des zulässigen $GL_n(\mathbb{A})$-Moduls und der Faktorisierungssatz für solche Moduln.

Seminarvorträge

31.10.05 und 07.11.05 Markus Hihn
Modulformen (nach J.P. Serre. A Course in Arithmetic VII, 1-4)

14.11.05 und 21.11.05 E. Stamp
Hecke Operatoren, loc.cit. VII, 5

28.11.05 und 05.12.05 Schoepffer
Dirichletreihen mit Funktionalgleichungen (aus Freitag, Busam, Funktionentheorie, VII. 3 und S. Gelbart, Automorphic Forms on Adele groups, §1)

04.01.06 und 09.01.06 D. Skodlerack
Elliptische Kurven und ihre Zeta-Funktionen (nach S. Gelbart, Advances in Math. 21,(1976),235-292)

16.01.06 und 23.01.06 E.L. Wirl
Lie Algebren, Poincaré Birkhoff Witt, Darstellungen von Lie Algebren und Casimir Elemente (Bourbaki, Lie, Kap I, §1-3)

09.02.06 und 13.02.06 D. Skodlerack
Theta-Funktionen und Zeta-Funktionen elliptischer Kurven (nach S. Gelbart, loc.cit.)