Ringe von Modulformen zu einer Familie von Kurven mit $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation

Diplomarbeit

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

eingereicht von: Thorsten Riedel
geb.: am 16.11.1968 in: Speyer
Betreuer: Prof. Dr. Rolf-Peter Holzapfel
Berlin, den 24. Juni 2004

Inhalt

1 Einleitung **2**

2 Die Kurvenfamilie F **7**
2.1 Die Periodenabbildung der Kurvenfamilie F 7
2.2 Monodromie 11
2.3 Arithmetische Beschreibung der Monodromie 15

3 Ein Schottky-Taniyama-Ring **21**
3.1 Schottky-Formen 21
3.2 Taniyama-Formen 30

Literatur **37**

Selbstständigkeitserklärung **39**

Thesen **40**

1 Einleitung

Wir betrachten zunächst die Familie $\mathcal{E}$ elliptischer Kurven in Weierstraß-Normalform

$$C(g_2, g_3) : wy^2 = 4x^3 - pw^2x - qw^3 \subset \mathbb{P}^2$$

mit Parametern $(p, q) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(p, q);\ p^3 - 27q^2 = 0\}$.
Jedem solchen Paar (p, q) können wir einen Punkt τ in der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und ein Gitter $L_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ zuordnen, so dass die Parameter gerade die Werte der Eisensteinreihen $g_2, g_3 : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ in τ sind, also

$$p = g_2(\tau) = 60 \sum_{\lambda \in L_\tau \backslash \{0\}} \frac{1}{\lambda^4} \quad \text{bzw. } q = g_3(\tau) = 140 \sum_{\lambda \in L_\tau \backslash \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}\ .$$

Sei $E_\tau = \mathbb{C}/L_\tau$ der komplex-eindimensionale Torus zum Gitter L_τ. Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zu L_τ

$$\wp_\tau(z) = 1/z^2 + \sum_{\lambda \in L_\tau \backslash \{0\}} (1/(z - \lambda)^2 - 1/\lambda^2)$$

definiert durch $(1 : \wp_\tau : \wp'_\tau) : E_\tau \longrightarrow \mathbb{P}^2$, $z \mapsto (1 : \wp_\tau(z) : \wp'_\tau(z))$ eine projektive Einbettung des Torus, wobei die Bildkurve von E_τ unter dieser Einbettung durch $C_\tau := C(g_2(\tau), g_3(\tau)) \in \mathcal{E}$ gegeben ist.

Jede Isomorphieklasse elliptischer Kurven (Kurven vom Geschlecht 1) über $\mathbb{C}$ besitzt einen Repräsentanten in Weierstraß-Normalform. Auf der anderen Seite ist jeder eindimensionale komplexe Torus isomorph zu einem Torus $\mathbb{C}/L_\tau$, $\tau \in \mathbb{H}$. Da zwei Kurven $C_\tau, C'_\tau \in \mathcal{E}$ genau dann isomorph sind, wenn es die entsprechenden Tori E_τ und $E_{\tau'}$ sind, haben wir Bijektionen zwischen Isomorphieklassen elliptischer Kurven, Isomorphieklassen elliptischer Kurven in Weierstraß-Normalform, Isomorphieklassen von Tori und Isomorphieklassen von Tori E_τ, $\tau \in \mathbb{H}$.

Die spezielle lineare Gruppe $\mathbb{Sl}_2(\mathbb{R})$ wirkt mittels gebrochen linearer Transformation (transitiv) auf $\mathbb{H}$. Da E_τ, $E_{\tau'}$ genau dann isomorph sind, wenn τ und τ' $\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})$-äquivalent sind ($\Leftrightarrow \tau' = \gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ mit einem $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})$) parametrisiert $\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ die Isomorphieklassen der Tori bzw. elliptischer Kurven.

Die elliptische Modulfunktion

$$j : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad j(\tau) := 12^3 \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27 g_3^2(\tau)}$$

ist eine $\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})$-invariante holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ und induziert einen Isomorphismus $\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{C}$. Der kompaktifizierte Modulraum der elliptischen Kurven ist demnach $M_1 = \mathbb{P}^1$.

Bemerkung 1.1 *Die Eisensteinreihen $g_2, g_3 : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind Modulformen zur elliptischen Modulgruppe $\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht 4 bzw.6, d.h. g_2, g_3 sind holomorph, haben eine Fourierreihenentwicklung $g_k(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_k(n) \exp 2\pi i n\tau$ (holomorph in $i\infty$) und es gilt $g_k(\gamma\tau) = (c\tau + d)^{2k} g_k(\tau)$ für alle $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})$, $k = 2, 3$.*

Nach dem Theorem von Kronecker werden die abelschen Erweiterungen der rationalen Zahlen durch Einheitswurzeln erzeugt, also spezielle Werte der Exponentialfunktion. Die Verallgemeinerung dieses Prinzips auf beliebige Zahlkörper, d.h. die Konstruktion von abelschen Erweiterungen durch spezielle Werte analytischer Funktionen, wurde von Hilbert in seinem Paris-Vortrag zum 12. Problem erhoben. Im Fall der imaginär-quadratischen Zahlkörper spielt die elliptische j-Funktion die analoge Rolle (Kroneckers Jugendtraum).

Der Endomorphismenring $\mathrm{End}(\mathbb{C}/L)$ eines eindimensionalen komplexen Torus ist entweder isomorph zum Ring der ganzen Zahlen oder zu einer Ordnung in einem imaginär-quadratischen Zahlkörper. Entsprechend ist die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}(\mathbb{C}/L)_{\mathbb{Q}} := \mathrm{End}(\mathbb{C}/L) \otimes \mathbb{Q}$ isomorph zu $\mathbb{Q}$ oder zu einem $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei. Im letzteren Fall sagen wir, dass der Torus bzw. die elliptische Kurve *komplexe Multiplikation (CM)* besitzt. $\tau \in \mathbb{H}$ ist ein *CM-Punkt*, wenn E_τ ein Torus mit komplexer Multiplikation ist. In CM-Punkten nimmt die j-Funktion algebraische Werte an und die Erweiterung $K(j(\tau))/K$ ist eine abelsche Erweiterung (*Klassenkörper*) vom Multiplikationskörper $K \cong \mathrm{End}(E_\tau)_{\mathbb{Q}}$.

Sei $[\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z}), k]$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k und $R[\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})] = \oplus_{k\geq 0}[\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z}), k]$ der (volle) Ring der Modulformen.

Zusammenfassend haben wir im Fall der elliptischen Kurven in Weierstraß-Normalform eine Familie $\mathcal{E}$ mit Parameterraum $\mathbb{H}$ und kompaktifiziertem

Modulraum $\mathbb{P}^1$, Modulformen g_2, g_3 (vom Gewicht 4 und 6) und eine Modulfunktion $j(\tau) = 12^3(g_2^3/(g_2^3 - 27g_3^2))(\tau)$ als Quotient dieser Formen mit den Eigenschaften

(*i*) g_2, g_3 erzeugen den Ring der Modulformen, also $R[\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})] = \mathbb{C}[g_2, g_3]$,

(*ii*) zu gegebenem Periodenpunkt τ ist

$$C_\tau : wy^2 = 4x^3 - g_2(\tau)w^2x - g_3(\tau)w^3 \subset \mathbb{P}^2$$

eine Kurve mit Periodenpunkt τ,

(*iii*) $C_\tau \cong C_{\tau'} \iff \tau' \in \mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z})\tau \iff j(\tau) = j(\tau')$,

(*iv*) j erzeugt den Körper der Modulfunktionen:

$$\mathbb{C}(j(\tau)) = \{f/g;\ f, g \in [\mathbb{Sl}_2(\mathbb{Z}), k], g \neq 0\} = Q^{hom}(R[Sl_2(\mathbb{Z})]),$$

(*v*) für einen CM-Punkt τ (eine CM-Kurve C_τ) ist $K(j(\tau))$ eine abelsche Erweiterung des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\tau)$.

Ziel des vorliegenden Textes ist es, aufbauend auf den Arbeiten von R.-P. Holzapfel [HV] bzw. [HPV] und K. Matsumoto [Ma], für die Familie F hyperelliptischer Kurven $\widetilde{C}(x, y)$ (vom Geschlecht 3) mit Modell

$$C(x, y) : w^4 = z^2(z-1)^2(z-x)(z-y),$$

Parameterraum $\Lambda = \mathbb{C}^2 \backslash \{(x, y);\ xy(x-1)(y-1)(x-y) = 0\}$ und Modulraum Λ/K, wobei $K \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ isomorph zum Produkt $Z_2 \times S_3$ einer zyklischen Gruppe der Ordnung zwei und der symmetrischen Gruppe von drei Buchstaben ist, ein analoges Resultat zu erhalten.

Die Konstruktion des Periodenpunktes einer Kurve induziert mehrdeutige Abbildungen $\widetilde{\Psi} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{B}_H$, $\widetilde{\Psi}_0 : \Lambda/K \longrightarrow \mathbb{B}_H$ des Parameterraums bzw. Modulraums in einen (zum komplex zweidimensionalen Ball $\mathbb{B}$ projektiv äquivalenten) Ball

$$\mathbb{P}^2 \supset \mathbb{B}_H = \{(z_0 : z_1 : z_2);\ (z_0, z_1, z_2)H^t(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2)\}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basierend auf den Ergebnissen von Deligne-Mostow [DM], Terada [Te] und Yoshida [Yo] zeigt Matsumoto, dass $\widetilde{\Psi}$ der Umkehrabbildung einer Ballquotientenabbildung entspricht, berechnet Erzeugende der Monodromiegruppe

M von $\widetilde{\Psi}$ und der erweiterten Monodromiegruppe M_0 von $\widetilde{\Psi}_0$ und gibt eine Darstellung von $\widetilde{\Psi}^{-1} : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mittels Quotienten von Produkten von Thetakonstanten $\frac{\phi_1}{\phi_0}$, $\frac{\phi_3}{\phi_2}$ mit M-Modulformen ϕ_j vom Gewicht 8.

Zusammen mit den Untersuchungen Holzapfels in [HV] lassen sich die Monodromiegruppen arithmetisch beschreiben (Satz 2.4). Die erweiterte projektive Monodromiegruppe $\mathbb{P}M_0$ (Bild von M_0 unter der Projektion $\mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}\mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{C})$) ist $\Gamma = \mathbb{P}\mathbb{U}(H, \mathbb{Z}[i]) \cong \mathbb{U}(H, \mathbb{Z}[i])/Z_{\mathbb{U}}$ ($Z_{\mathbb{U}}$ Zentrum von $\mathbb{U}(H, \mathbb{Z}[i])$), $\mathbb{P}M$ ist eine Untergruppe vom Index 2 der Kongruenzuntergruppe $\Gamma(1+i)$. Für die Baily-Borel-Kompaktifizierungen $\hat{X}_G := \widehat{\mathbb{B}_H/G}$ der Quotientenflächen erhalten wir damit $\hat{X}_{\mathbb{P}M} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\hat{X}_{\Gamma_1} = \mathbb{P}^2$, $\Gamma_1 = \Gamma(1+i)$, sowie $\hat{X}_{\mathbb{P}M_K} = \hat{X}_\Gamma = \mathbb{P}^2/S_3$.

Mittels der Veronese-Einbettung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ nach $\mathbb{P}^3$ und einer anschließenden Quotientenabbildung nach einer Spiegelungsgruppe liefern die oben annoncierten Produkte von Thetakonstanten ϕ_j bei geeigneter Wahl eines projektiven Koordinatensystems Γ_1-Modulformen g_0, g_1, g_2 auf $\mathbb{B}_H$, so dass $(g_0 : g_1 : g_2) : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2 = \hat{X}_{\Gamma_1}$ der Projektion $p_{\Gamma_1} : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{B}_H/\Gamma_1$ (bis auf Kompaktifizierung) entspricht und $S_3 = \Gamma/\Gamma_1$ durch Permutation der Koordinaten auf $\mathbb{P}^2$ wirkt.

Auf der anderen Seite dient die rationale Fläche $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma'}$, $\Gamma' = \mathbb{P}\mathbb{U}((2,1), \mathbb{Z}[i])$ (Shimura-Varietät) als Modulraum hauptpolarisierter abelscher 3-folds mit $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation vom Typ (2,1) (siehe [Sh63], [Sh64]). Von Shimura-Taniyamas Theorie der komplexen Multiplikation kann man ablesen, dass für CM-Punkte τ bzw. CM-Varietäten A_τ der (erweiterte) Modulkörper $M(A_\tau)K'$ eine abelsche Erweiterung des Reflexkörpers K' ist. Nach einem Theorem von Torelli koinzidiert der Modulraum der Kurvenfamile F mit dem Modulraum der hauptpolarisierten Jacobischen der Kurven und diese sind abelsche 3-folds mit einer solchen Multiplikation. Mit dem in [HPV] angegebenen Weg lässt sich nun eine j-Funktion als Quotient der g_0, g_1, g_2 definieren, so dass für $\tau \in \mathbb{B}_H$ außerhalb des Verzweigungsorts der Quotientenabbildung der Modulkörper $M(\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau))$ über $\mathbb{Q}$ durch $j(\tau)$ erzeugt ist.

Insgesamt haben wir also für die Familie F mit (kompaktifiziertem) Modulraum $\mathbb{P}^2/S_3$ explizite Formen g_0, g_1, g_2 (mittels Thetakonstanten) zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_1 = \Gamma(1+i)$ von $\Gamma = \mathbb{P}\mathbb{U}(H, \mathbb{Z}[i]) \cong \mathbb{S}\mathbb{U}(H, \mathbb{Z}[i])$ und eine j-Funktion als Quotient dieser Formen mit den Eigenschaften

(*i*) g_0, g_1, g_2 sind Γ_1-Modulformen; der homogene Quotientenkörper des von ihnen erzeugten (graduierten) Unterrings $R'[\Gamma_1]$ des Rings der Γ_1-

Modulformen stimmt mit dem Funktionenkörper von $\mathrm{Proj}(R[\Gamma_1]) = \widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma_1} = \mathbb{P}^2$ überein,

(*ii*) zu gegebenem Periodenpunkt τ außerhalb des Verzweigungsorts der Quotientenabbildung $(g_0 : g_1 : g_2) : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2$ (Urbild einer ebenen Apolloniuskonfiguration) ist $\widetilde{C}_\tau$ mit Modell

$$C_\tau : w^4 = z^2(z-1)^2\left(z^2 - \frac{g_0(\tau) - g_1(\tau) + g_2(\tau)}{g_0(\tau)}z + \frac{g_2(\tau)}{g_0(\tau)}\right)$$

eine Kurve mit Periodenpunkt τ,

(*iii*) $\widetilde{C}_\tau \cong \widetilde{C}_{\tau'} \iff \tau' \in \Gamma\tau \iff j(\tau) = j(\tau')$,

(*iv*) $\mathbb{C}(j(\tau)) = \{f/g;\ f, g \in [\Gamma, k], g \neq 0\} = Q^h(R[\Gamma])$, wobei $[\Gamma, k]$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k und $R[\Gamma] = \oplus_{k\geq 0}[\Gamma, k]$ der volle Ring der Modulformen ist, m.a.W. j erzeugt (über $\mathbb{Q}$) den Körper der Modulfunktionen,

(*v*) für CM-Punkte τ ist $K'(j(\tau))$ ein Klassenkörper des Reflexkörpers K'.

Definition 1.2 *Sei F eine Familie von Kurven mit Modulraum M und Modulgruppe Γ, Γ' eine Kongruenzuntergruppe von Γ. Modulformen zu Γ' nennen wir* Schottky-Formen*, wenn sie zu gegebenem Periodenpunkt eine Kurvengleichung mit diesem Periodenpunkt liefern.* Taniyama-Formen *sind Γ'-Modulformen, die zur Konstruktion von Klassenkörpern dienen.* Schottky-Taniyama-Formen *einer Kurvenfamilie sind Modulformen zu einer Kongruenzuntergruppe bei denen beides zusammenkommt. Ein graduierter Ring, der durch Schottky-Taniyama-Formen erzeugt wird, heißt* Schottky-Taniyama-Ring *der Kurvenfamilie.*

In Kapitel 2 werden zunächst Matsumotos Resultate, die zu den Monodromiegruppen führen, dargestellt. Der Beweis von Satz 2.4 und damit der Brückenschlag zu arithmetischen Modulgruppen und Holzapfels Arbeiten zu Modulflächen bzw. Shimura-Taniyamas Theorie der abelschen Zahlkörper wird über Resultate aus [HV] geführt und ist eine Version des Beweises von Matsumoto (Beweis der Proposition 2.2 in [Ma]), der lückenhaft erschien (Spitzen der Gruppe M_1).

In Kapitel 3 werden dann, ausgehend von Matsumotos Darstellung der inversen Periodenabbildung durch Quotienten von Modulformen zur Monodromiegruppe, Schottky-Formen konstruiert und schließlich ([HPV] folgend)

der Weg zur angekündigten j-Funktion gegeben.

Mein Dank gilt Professor Rolf-Peter Holzapfel für die ausführliche Anleitung zu dieser Arbeit sowie Dr. Florin Nicolae und seiner tatkräftigen Unterstützung beim Bearbeiten der Probleme.

2 Die Kurvenfamilie F

2.1 Die Periodenabbildung der Kurvenfamilie F

Wir betrachten die Familie

$$F := \bigcup_{(x,y)\in\Lambda} \widetilde{C}(x,y)$$

glatter projektiver Kurven $\widetilde{C}(x,y)$ mit singulärem Modell

$$C(x,y) : w^4 = z^2(z-1)^2(z-x)(z-y) \subset \mathbb{P}^2,$$

wobei (x,y) den Parameterraum $\Lambda := \mathbb{C}^2\backslash\{(x,y) \mid xy(x-1)(y-1)(x-y) = 0\}$ durchläuft.

Die Projektion $\pi : \widetilde{C}(x,y) \longrightarrow \mathbb{P}^1$, $(z,w) \mapsto z$ ist eine zyklische Überlagerung der projektiven Geraden vom Grad 4, verzweigt in $0, 1, x, y$ und ∞. Nach der Hurwitzschen Geschlechtsformel (für endliche separable Erweiterungen vom Grad n (siehe [St], Ch. III, Corollary III.5.6)) ist das Geschlecht der Kurven gegeben durch

$$2g(\widetilde{C}(x,y)) - 2 = n(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{P\in\mathbb{P}^1}\sum_{P'|P}(e(P' \mid P) - 1).$$

Der Verzweigungsindex von P' über P berechnet sich in unserem (zyklischen) Fall durch $e(P' \mid P) = n/ggT(n, v_p(w^n))$, was zu den folgenden Werten führt:

$$e(P' \mid P) = \begin{cases} 2, & P \in \{(z), (z-1), (1/z)\} \\ 4, & P \in \{(z-x), (z-y)\} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Anzahl der über P liegenden Stellen P' ergibt sich

$$\#(P' \mid P) = \begin{cases} 2, & P \in \{(z), (z-1), (1/z)\} \\ 1, & P \in \{(z-x), (z-y)\} \\ 4, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in die Geschlechtsformel ein

$$2g(\widetilde{C}(x,y)) - 2 = -8 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 4,$$

erhalten wir $g(\widetilde{C}(x,y)) = 3$.

Seien η_1, η_2, η_3 Differentialformen definiert durch

$$\eta_1 := \tfrac{dz}{w}, \quad \eta_2 := \tfrac{z(z-1)dz}{w^3}, \quad \eta_3 := \tfrac{z^2(z-1)dz}{w^3},$$

P_x, P_y bzw. P_{01}, P_{02}, P_{11}, P_{12}, $P_{\infty 1}$, $P_{\infty 2}$ seien die Urbilder von $(x,0)$, $(y,0)$ bzw. $(0,0)$, $(1,0)$, (∞,∞) unter der Singularitätenauflösung $\sigma : \widetilde{C}(x,y) \longrightarrow C(x,y)$.
Die Divisoren (w) und (dz) sind

$$\begin{aligned}(w) &= P_{01} + P_{02} + P_{11} + P_{12} + P_x + P_y - 3P_{\infty 1} - 3P_{\infty 2}\\ (dz) &= P_{01} + P_{02} + P_{11} + P_{12} + 3P_x + 3P_y - 3P_{\infty 1} - 3P_{\infty 2}\end{aligned}$$

und damit haben die Divisoren der Differentialformen die Gestalt

$$(\eta_1) = 2P_x + 2P_y, \quad (\eta_2) = 2P_{\infty 1} + 2P_{\infty 2}, \quad (\eta_3) = 2P_{01} + 2P_{02}.$$

Insbesondere sind die Divisoren effektiv und somit η_1, η_2, η_3 holomorph (und $\mathbb{C}$-linear unabhängig), bilden also, da das Geschlecht $g(\widetilde{C}(x,y)) = 3$ der Dimension von $\Omega^1(\widetilde{C}(x,y))$ entspricht, eine Basis der holomorphen Differentialformen.

Der Divisor der Abbildung

$$f := \eta_1/(\eta_3 - y\eta_2) = w^2/z(z-1)(z-y)$$

ist wegen $(\eta_3 - y\eta_2) = 4P_y$ gleich $(f) = (\eta_1) - (\eta_3 - y\eta_2) = 2P_x + 2P_y - 4P_y = 2P_x - 2P_y$. Da der Grad $\deg f = \deg(f)_0 = 2$ ist, definiert die Abbildung eine 2:1-Überlagerung $\widetilde{C}(x,y) \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Die Kurven unserer Familie sind daher hyperelliptisch vom Geschlecht 3.

Sei $\{A_j, B_k, 1 \le j,k \le 3\}$ eine Normalbasis der Homologiegruppe $H_1(\widetilde{C}(x,y),\mathbb{Z})$, also eine Basis, deren Schnittmatrix $(A_j \circ B_k)$ kanonische Form $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -E_3 \\ E_3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat. $(\Omega_1 \mid \Omega_2) := (\int_{A_j} \eta_k \mid \int_{B_j} \eta_k) \in \mathrm{Mat}(3 \times 6; \mathbb{C})$ sei die

entsprechende Periodenmatrix. Aus den Riemannschen Periodenrelationen folgt, dass der (von den Basen abhängige) Periodenpunkt $\Omega = \Omega_1^{-1}\Omega_2$ ein Punkt des Siegelgebiets

$$\mathbb{H}_3 = \{\Omega \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{C});\ {}^t\Omega = \Omega,\ \mathrm{Im}(\Omega) \text{ positiv definit}\}.$$

ist.
Ein Normalbasenwechsel in der Homologiegruppe bestimmt dabei eine $\mathbb{Sp}(6,\mathbb{Z})$-Transformation, wobei die Wirkung der symplektischen Gruppe auf $\mathbb{H}_3$ durch $\mathbb{Sp}(6,\mathbb{Z}) \ni \gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) : \Omega \mapsto (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}$ gegeben ist.

Um das Verfahren explizit durchzuführen betrachtet Matsumoto zunächst für feste Parameter x_0 und y_0 mit $1 < x_0 < y_0$ die Kurve $\widetilde{C}_0 := \widetilde{C}(x_0, y_0)$ als vierblättrige Überlagerung von $\mathbb{P}^1$ und berechnet die Periodenmatrix sowie den Periodenpunkt zu einer fixierten Homologiebasis (als Basis der holomorphen 1-Formen ist stets η_1, η_2, η_3 gewählt). Wird der Parameter in Λ entlang eines stetigen Weges variiert, lässt sich eine Homologiebasis (die vom gewählten Weg abhängt) und somit auch eine Periodenmatrix und ein Periodenpunkt konstruieren.

Sei $\lambda_0 := (x_0, y_0)$ und $\widetilde{C}_0$ wie oben gewählt. Der Verzweigungsort der Projektion $\pi : \widetilde{C}_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$, $(z,w) \mapsto z$ ist $B(\pi) = \{\infty, 0, 1, x_0, y_0\} \subset \mathbb{P}^1$ bzw. $R(\pi) := \pi^{-1}(B(\pi)) = \{P_{\infty,i}, P_{0,i}, P_{1,i}, P_{x_0}, P_{y_0};\ i = 1,2\}$ auf $\widetilde{C}_0$. Seien σ_k, $k = 1,2,3,4$ die Blätter der Riemannschen Fläche. Der Automorphismus $\rho \in \mathrm{Aut}(\widetilde{C}_0)$, $\rho(z,w) = (z, iw)$ permutiert die σ_k und bei geeigneter Nummerierung ist $\rho(\sigma_k) = \sigma_{k+1}$, $k = 1,2,3$ bzw. $\rho(\sigma_4) = \sigma_1$.

Notation: $\alpha^{(j)}(P,Q)$ bezeichne einen orientierten Weg von P nach Q in der Komponente σ_j.
Die folgenden 1-Zykel definieren eine Normalbasis der Homologiegruppe:

$$\begin{array}{rcl} A_1 := & \alpha^{(1)}(P_{01}, P_{\infty 1}) + \alpha^{(3)}(P_{\infty 1}, P_{01}), \\ A_2 := & \alpha^{(2)}(P_{02}, P_{\infty 2}) + \alpha^{(4)}(P_{\infty 2}, P_{02}), \\ A_3 := & \alpha^{(1)}(P_{y_0}, P_{x_0}) + \alpha^{(2)}(P_{x_0}, P_{y_0}), \\ B_1 := & \alpha^{(1)}(P_{11}, P_{01}) + \alpha^{(3)}(P_{01}, P_{11}), \\ B_2 := & \alpha^{(2)}(P_{12}, P_{02}) + \alpha^{(4)}(P_{02}, P_{12}), \\ B_3 := & \alpha^{(1)}(P_{y_0}, P_{x_0}) + \alpha^{(4)}(P_{x_0}, P_{y_0}). \end{array} \tag{1}$$

Die Integrale der 1-Formen η_j entlang der Zykel B_j, A_k seien

	B_1	B_2	B_3	A_1	A_2	A_3
η_1	a_2	a_4	a_6	a_1	a_3	a_5
η_2	b_2	b_4	b_6	b_1	b_3	b_5
η_3	c_2	c_4	c_6	c_1	c_3	c_5

was beispielsweise zu lesen ist als $a_2 := \int_{B_1} \eta_1$.
Der Automorphismus ρ induziert auf der Homologiebasis die Beziehungen

$$\begin{array}{lll} \rho A_1 = A_2, & \rho A_2 = -A_1, & \rho A_3 = B_3, \\ \rho B_1 = B_2, & \rho B_2 = -B_1, & \rho B_3 = -A_3 \end{array} \tag{2}$$

und damit auf den Integralen die Relationen

$$\begin{array}{llllll} a_3 = & -ia_1, & a_4 = & -ia_2, & a_6 = & -ia_5, \\ b_3 = & ib_1, & b_4 = & ib_2, & b_6 = & ib_5, \\ c_3 = & ic_1, & c_4 = & ic_2, & c_6 = & ic_5. \end{array} \tag{3}$$

Bemerkung 2.1 *Laut Matsumoto ([Ma], Relationen (1.6) bzw. (1.9)) ist* $\rho(A_3) = -B_3$, $\rho(B_3) = A_3$ *und* $a_2 = -ia_4$, $b_2 = ib_4$, $c_2 = ic_4$. *Durch Anwendung von* ρ *auf* B_3 *erhält man* $\rho B_3 = \alpha^{(2)}(P_{y_0}, P_{x_0}) + \alpha^{(1)}(P_{x_0}, P_{y_0}) = -A_3$ *und* $-B_3 = \rho^2(B_3) = \rho(-A_3) = -\rho(A_3)$. *Die Integrale berechnen sich entsprechend. Matsumotos Rechnungen im weiteren Verlauf seines Artikels sind mit den korrigierten Relationen richtig.*

Unter Ausnutzung der Symmetrie lässt sich der Periodenpunkt mittels (3) in Abhängigkeit der Periodenintegrale a_1, a_2 und a_5 darstellen und hat die Gestalt (siehe [Ma], (1.10))

$$\Omega = \begin{pmatrix} u + \frac{i}{2}v^2 & -\frac{1}{2}v^2 & -iv \\ -\frac{1}{2}v^2 & u - \frac{i}{2}v^2 & v \\ -iv & v & i \end{pmatrix}, \tag{4}$$

wobei $u := \frac{a_2}{a_1}$, $v := \frac{a_5}{a_1}$.

Ausgehend von der fixierten Kurve $\widetilde{C}_0$ lässt sich eine Homologiebasis für beliebige Kurven aus unserer Familie bestimmen. Sei s ein (stückweise stetig differenzierbarer) Weg von λ_0 nach $\lambda = (x, y)$ in Λ. Da $pr : F \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$ ein lokal-triviales Faserbündel mit kompakten Fasern ist, lässt sich durch Fortsetzung von $\{B_j, A_k\}$ entlang s eine (wegabhängige) Basis $\{B_j(x, y), A_k(x, y)\}$ von $H_1(\widetilde{C}(x, y), \mathbb{Z})$ definieren. Da der Automorphismus $\rho : (z, w) \mapsto (z, iw)$

auf jeder Kurve $\widetilde{C}(x,y) \in F$ definiert ist und auf den Basen sowie den Periodenintegralen analoge Beziehungen (2) bzw. (3) liefert, erhalten wir die mehrdeutige Abbildung

$$\Psi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{H}_3,\ (x,y) \mapsto \Omega(x,y) = \begin{pmatrix} u+\frac{i}{2}v^2 & -\frac{1}{2}v^2 & -iv \\ -\frac{1}{2}v^2 & u-\frac{i}{2}v^2 & v \\ -iv & v & i \end{pmatrix}$$

mit $u := u(x,y) := \frac{a_2(x,y)}{a_1(x,y)}$, $v := \frac{a_5(x,y)}{a_1(x,y)}$.

Betrachten wir einen projektiv transformierten Ball

$$\mathbb{B}_H := \{(\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2) \in \mathbb{P}^2;\ (\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2)H^t(\bar{\zeta_0},\bar{\zeta_1},\bar{\zeta_2}) < 0\},\ H := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

mit einer hermiteschen Matrix H der Signatur (2,1), den wir ggf. mit $\{(u,v) \in \mathbb{C}^2;\ (1,u,v)H^t(1,\bar{u},\bar{v}\}$ identifizieren, und eine Einbettung $\mu : \mathbb{B}_H \hookrightarrow \mathbb{H}_3$ gegeben durch

$$\mu(\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2) := \begin{pmatrix} u+\frac{i}{2}v^2 & -\frac{1}{2}v^2 & -iv \\ -\frac{1}{2}v^2 & u-\frac{i}{2}v^2 & v \\ -iv & v & i \end{pmatrix}, \tag{5}$$

wobei $u = \frac{\zeta_1}{\zeta_0}$, $v = \frac{\zeta_2}{\zeta_0}$.
Aus der positiven Definitheit des Imaginärteils eines Periodenpunkts $\Omega(x,y) =: \Omega(u,v)$ folgt die Ungleichung $\mathrm{Im}(u) - \frac{1}{2}|v|^2 > 0$, was äquivalent ist zu

$$(a_1,a_2,a_5)H^t(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_5) < 0.$$

Demnach ist $\Psi(\Lambda) \subset \mu(\mathbb{B}_H)$ und wir können eine mehrdeutige (Perioden-) Abbildung $\widetilde{\Psi} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{B}_H$ durch

$$\widetilde{\Psi}(x,y) := (\mu^{-1} \circ \Psi)(x,y) = (a_1(x,y) : a_2(x,y) : a_5(x,y))$$

definieren.

2.2 Monodromie

Mit den Resultaten von Terada ([Te]), Deligne-Mostow ([DM]) und Yoshida ([Yo]) lässt sich die Periodenabbildung $\widetilde{\Psi}$ als Umkehrabbildung (*developing map*) eines (Fuchsschen) Systems hypergeometrischer Differentialgleichungen

$F_1(\mu)$ charakterisieren.
Seien $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ rationale Zahlen mit $0 < \mu_j < 1$, $\sum_{j=0}^{4} \mu_j = 2$. d sei der Hauptnenner der μ_j und $m_j := d\mu_j$ für $j = 0, 1, 2, 3, 4$.
Für $(x, y) \in \Lambda$ sei $\tilde{C}_\mu(x, y)$ eine glatte ebene Kurve mit Modell

$$C_\mu(x, y) : w^d = z^{m_0}(z-1)^{m_1}(z-x)^{m_2}(z-y)^{m_3}.$$

Auf den Kurven $\tilde{C}_\mu(x, y)$ ist durch

$$\eta := \frac{dz}{w} = z^{-\mu_0}(z-1)^{-\mu_1}(z-x)^{-\mu_2}(z-y)^{-\mu_3}dz \in \Omega^1(\tilde{C}_\mu(x, y))$$

eine holomorphe Differentialform definiert.
Sei wieder ein Parameter (x_0, y_0) fixiert, s ein Weg von (x_0, y_0) nach (x, y) in Λ und $\gamma(x, y)$ der durch Fortsetzung entlang s aus $\gamma \in H^1(\tilde{C}_\mu(x_0, y_0), \mathbb{Z})$ resultierende Zykel in $H^1(\tilde{C}_\mu(x, y), \mathbb{Z})$. Lokal bei (x_0, y_0) definieren die Periodenintegrale $I_\gamma(x, y) := \int_{\gamma(x,y)} \eta$ als Funktion in x, y (lokal eindeutige) Abbildungen, die einem (Appell-) System hypergeometrischer Differentialgleichungen F_1 genügen. Der Lösungsraum des Systems hat Dimension 3 und die Lösungen sind als Kombinationen der Periodenintegrale darstellbar (siehe [Yo]). Sind also $I_1(x, y) := I_{\gamma_1}(x, y)$, $I_2(x, y) := I_{\gamma_2}(x, y)$, $I_3(x, y) := I_{\gamma_3}(x, y)$ drei lokale Fundamentallösungen, dann definiert die analytische Fortsetzung entlang eines geschlossenen Wegs δ einen Basiswechsel im Lösungsraum und damit eine Darstellung der Fundamentalgruppe $\pi_1(\Lambda, (x, y)) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{C})$. Das Bild $M(\mu)$ der Fundamentalgruppe ist die *Monodromiegruppe* des Systems, die *projektive Monodromiegruppe* $\mathbb{P}M(\mu)$ ist das Bild von M unter der Projektion $\mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{C})$.
Sei zusätzlich die Begingung

(INT) Für $j \neq k$, $j, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit $\mu_j + \mu_k < 1$ ist $(1 - \mu_j - \mu_k)^{-1} \in \mathbb{Z}$

erfüllt.
Nach einem Reslutat von Deligne und Mostow ([DM], Theorem 11.4) ist die durch analytische Fortsetzung dreier lokaler Basislösungen definierte (mehrdeutige) Abbildung $(I_1 : I_2 : I_3) : \Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^2$, $(x, y) \mapsto (I_1(x, y) : I_2(x, y) : I_3(x, y))$ lokal biholomorph mit offenem und dichtem Bild in einem projektiven Ball $\mathbb{B}_H$ und die projektive Monodromiegruppe ein Gitter in $\mathbb{P}\mathbb{U}(H, \mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{B}_H)$, d.h. eine diskrete Untergruppe mit endlichem Kovolumen.
Sei $u_0 := 0$, $u_1 := 1$, $u_2 := x$, $u_3 := y$, $u_4 := \infty$ und $S_{ij} : u_i = u_j$, $0 \leq i \leq 4$,

$j = 2, 3$ Geraden in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Die Projektion $\mathbb{B}_H \to \mathbb{B}_H/\mathbb{P}M(\mu) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist entlang der sieben Geraden verzweigt mit Verzweigungsordnungen $b_{ij} = (1 - \mu_i - \mu_j)^{-1}$ in S_{ij} (siehe [Yo], PTDM-Theorem). Die Projektion ist also eine Uniformisierung des Orbifolds $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, S, b)$ ($b = \{b_{ij}\}$, $S = \cup S_{ij}$) durch $\mathbb{B}_H$ im Sinne Yoshidas, d.h. eine Überlagerung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \backslash \{S_{ij};\ b_{ij} = \infty\}$, die genau über den S_{ij} mit endlichen Gewichten b_{ij} verzweigt ist.

In unserem Fall ist $\mu_0 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_2 = \frac{1}{4}$, $\mu_3 = \frac{1}{4}$, $\mu_4 = \frac{1}{2}$, die Bedingung (INT) also erfüllt. Aus der Liste (14.4) auf S. 86 in [DM] (Fall 2) liest man weiter ab, dass das Gitter $\mathbb{P}M := \mathbb{P}M(\mu)$ arithmetisch ist. Genauer liefern die Beziehungen (3), dass $M := M(\mu)$ in $\mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{Z}[i])$ enthalten ist. Die uniformisierende Abbildung $\mathbb{B}_H \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \backslash \{(0,0), (1,1), (\infty, \infty)\}$ ist verzweigt über den sieben Geraden S_{ij} mit Gewicht 2 auf der Diagonalen (außerhalb der Dreifachpunkte) und 4 auf den verbleibenden Geraden $S \backslash S_{23}$. Nach Konstruktion sind die Periodenintegrale a_1, a_2, a_5 (lokale) Basislösungen des Appellsystems $F_1(\mu)$. Die Inverse der Periodenabbildung $\widetilde{\Psi}^{-1}$ entspricht somit der Quotientenabbildung.

Um die Monodromiegruppe M zu berechnen wählt Matsumoto ein Erzeugendensystem $\delta_1, \ldots, \delta_5$ der Fundamentalgruppe $\pi_1(\Lambda, \lambda_0)$. Fortsetzung entlang der Schleifen führt zu Diffeomorphismen der Riemannschen Fläche $\widetilde{C}(\lambda_0)$ und zu Normalbasenwechseln, also symplektischen Transformationen $n(\delta_j) \in \mathbb{S}\mathrm{p}(6, \mathbb{Z})$. Integration über die transformierten Homologiebasen führt schließlich zu den Transformationen der Integrale $g(\delta_j) \in \mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{Z}[i])$ ($j = 1, \ldots, 5$) der Gestalt (siehe [Ma], (2.5))

$$g(\delta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 1 & 1-i \\ -1-i & 0 & i \end{pmatrix}, \qquad g(\delta_2) = \begin{pmatrix} 2+i & -1-i & -1-i \\ 1+i & -i & -1-i \\ 1-i & -1+i & i \end{pmatrix},$$

$$g(\delta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad g(\delta_4) = \begin{pmatrix} i & 1-i & 1-i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & -1-i & -1 \end{pmatrix},$$

$$g(\delta_5) = \begin{pmatrix} 2+i & -1-i & 1-1 \\ 1+i & -i & 1-i \\ -1-i & 1+i & i \end{pmatrix}.$$

Seien k_1, k_2, k_3 Automorphismen von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ definiert durch

$$k_1(x,y) = (y,x),\ k_2(x,y) = (1-x, 1-y),\ k_3(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

und $K =< k_1, k_2, k_3 >$ die von ihnen erzeugte Untergruppe. K ist isomorph zum Produkt $Z_2 \times S_3$ einer zyklischen Gruppe Z_2 der Ordnung zwei und der symmetrischen Gruppe S_3 von drei Buchstaben.

In Appendix 1 in [HPV] zeigt A. Piñeiro, dass zwei Kurven der Familie F genau dann isomorph sind, wenn es einen Automorphismus von $\mathbb{P}^1$ gibt, der die Bilder der Verzweigungspunkte $f(\{P_x, P_y\}) = \{0, \infty\}$ und $f(\{P_{0i}, P_{1,i}, P_{\infty,i}, i = 1, 2\}) = \{\pm 1, \pm\sqrt{\frac{x}{y}}, \pm\sqrt{\frac{1-x}{1-y}}\}$ der 2 : 1-Überlagerung $f = \eta_1/(\eta_3 - y\eta_2)$ ineinander überführt. Sind $\widetilde{C}(x, y)$ und $\widetilde{C}(x', y')$ zwei isomorphe Kurven, $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ der entsprechende Automorphismus, dann bleiben genau die folgenden Möglichkeiten

$\rho(t) = ct$				$\rho(t) = c/t$			
c	x'	y'	k	c	x'	y'	k
± 1	x	y	id	± 1	y	x	k_1
± 1	$1-x$	$1-y$	k_2	± 1	$1-y$	$1-x$	k_2k_1
$\pm\sqrt{\frac{y}{x}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	k_3	$\pm\sqrt{\frac{x}{y}}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	k_3k_1
$\pm\sqrt{\frac{y}{x}}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{y-1}{y}$	k_2k_3	$\pm\sqrt{\frac{x}{y}}$	$\frac{y-1}{y}$	$\frac{x-1}{x}$	$k_2k_3k_1$
$\pm\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-y}$	k_3k_2	$\pm\sqrt{\frac{1-x}{1-y}}$	$\frac{1}{1-y}$	$\frac{1}{1-x}$	$k_3k_2k_1$
$\pm\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	$k_2k_3k_2$	$\pm\sqrt{\frac{1-x}{1-y}}$	$\frac{y}{y-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$k_2k_3k_2k_1$

wobei in der rechten Spalte die zugehörige Transformation in K aufgeführt ist. Wir haben also $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1/K$ als kompaktifizierten Modulraum der Familie.

Durch Fortsetzung δ_j^* entlang Bögen δ_j, $j = 6, 7, 8$ von λ_0 zu den K-äquivalenten Punkten $k_1(\lambda_0)$, $k_2(\lambda_0)$ bzw. $k_3(\lambda_0)$ erhält man Transformationen $g(\delta_j) \in \mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{Z}[i])$, so dass $\delta_j^* : {}^t(a_1, a_2, a_5) \mapsto g(\delta_j){}^t(a_1, a_2, a_5)$ und damit $(\pi_1(\Lambda/K, \bar{\lambda}_0)$ ist durch $\pi_1(\Lambda, \lambda_0)$ und δ_j, $j = 6, 7, 8$ erzeugt) eine Darstellung der Fundamentalgruppe von Λ/K. Das Bild in $\mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{C})$ (in $\mathbb{P}\mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{C})$) ist die erweiterte (projektive) Monodromiegruppe M_0 (resp. $\mathbb{P}M_0$) der mehrdeutigen Abbildung $\widetilde{\Psi}_0 : \Lambda/K \longrightarrow \mathbb{B}_H$.
Eine konkrete Wahl der Bögen führt zu (siehe [Ma], (2.7))

$$g(\delta_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad g(\delta_7) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(\delta_8) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Arithmetische Beschreibung der Monodromie

Im zweiten Teil des Artikels [HV] zeigt R.-P. Holzapfel, dass für die Kongruenzuntergruppe $\Gamma(1+i) = \Gamma(\pi)$ von $\Gamma = \mathbb{SU}((2,1),\mathbb{Z}[i])$ die Baily-Borel-Kompaktifizierung $\hat{X}_{\Gamma(\pi)} = \widehat{\mathbb{B}/\Gamma(\pi)}$ von $\mathbb{B}/\Gamma(\pi)$ die komplex projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ ist und beschreibt präzise den Verzweigungsort der Quotientenabbildung. Um die Resultate formulieren zu können, brauchen wir zunächst einige Definitionen und Eigenschaften von Ballquotienten (siehe [HV], Ch. 8 oder [Ho98], Ch. IV).

Sei $\Gamma' \subset \mathbb{SU}((2,1),\mathbb{C})$ ein arithmetisches Ball-Gitter, das effektiv durch projektive (gebrochen lineare) Transformation auf dem komplexen Ball

$$\mathbb{B} = \{(z_1,z_2) = (z_1 : z_2 : 1) \in \mathbb{P}^2;\ |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

operiert.

Eine *Spiegelung* ist ein Element endlicher Ordnung $1 \neq \sigma \in \Gamma'$, das eine (eindeutig bestimmte) Scheibe $\mathbb{D} = \mathbb{D}_\sigma$ in $\mathbb{B}$ punktweise fixiert. Eine Γ'-*Spiegelscheibe* ist eine Scheibe, die von einer Spiegelung fixiert wird. Eine $\mathbb{D}$-*Spiegelung* einer gegebenen Scheibe $\mathbb{D}$ ist eine Spiegelung σ mit $\mathbb{D} = \mathbb{D}_\sigma$. Ist Γ' ein fixiertes Gitter sprechen wir der Bequemlichkeit halber von Spiegelscheiben etc. ohne das Präfix Γ' zu erwähnen. $\mathbb{D}$-Spiegelungen in Γ' bilden eine endliche zyklische Gruppe, deren Ordnung ($\mathbb{D}$-*Spiegelungsordnung* in/von Γ') per Definition mit dem Verzweigungsindex der Quotientenabbildung $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}/\Gamma'$ entlang $\mathbb{D}$ übereinstimmt.
Eine Γ'-*Spitze* ist ein Randpunkt $\kappa \in \partial\mathbb{B}$ von $\mathbb{B}$, so dass die unipotenten Elemente des Stabilisators Γ'_κ ein Gitter im unipotenten Radikal der parabolischen Gruppe $\mathbf{P}_\kappa(\mathbb{R})$ aller κ fixierenden Elemente in $\mathbb{SU}((2,1),\mathbb{C})$ bilden. Sei $\partial_{\Gamma'}\mathbb{B}$ die Menge aller Γ'-Spitzen. Die Quotientenabbildung $p_{\Gamma'}$ lässt sich stetig zu einer eindeutigen surjektiven Abbildung $\hat{p}_{\Gamma'} : \mathbb{B}^* = \mathbb{B} \cup \partial_{\Gamma'}\mathbb{B} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{B}/\Gamma'}$ auf die Baily-Borel-Kompaktifitierung $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma'}$ von $\mathbb{B}/\Gamma'$ fortsetzen.
Ein Element $1 \neq \gamma \in \Gamma'$ endlicher Ordnung, das keine Spiegelung ist, heißt *elliptisch*. γ ist elliptisch, wenn es genau einen Fixpunkt $Q \in \mathbb{B}$ besitzt. Umgekehrt ist ein Ballpunkt Q ein Γ'-*elliptischer Punkt*, wenn er isolierter Fixpunkt von Γ', also Fixpunkt eines elliptischen Elements, ist.
Teilmengen M, N bzw. Punkte P, Q von $\mathbb{B}^*$ sind Γ'-*äquivalent*, wenn es ein $\gamma \in \Gamma'$ gibt, so dass $\gamma(N) = M$ bzw. $\gamma(Q) = P$. Die Γ'-Äquivalenzklassen von Γ'-elliptischen Punkten, Γ'-Spitzen und Γ'-Spiegelscheiben sind endlich. Zu einer Unterscheibe $\mathbb{D}_i$ sei $\Gamma'_i := \{\gamma \in \Gamma';\ \gamma(\mathbb{D}_i) = \mathbb{D}_i\}$ die Untergruppe

der auf $\mathbb{D}_i$ wirkenden Elemente.
Wir stellen folgende Forderungen an Γ':

(*i*) Es existieren genau drei Γ'-inäquivalente Γ'-Spitzen κ_1, κ_2, κ_3 in $\partial\mathbb{B}$, die korrespondierenden Spitzenpunkte K_1, K_2, K_3 auf $\hat{X}_{\Gamma'} := \widehat{\mathbb{B}/\Gamma'}$ seien nichtsingulär.

(*ii*) Bis auf Γ'-Äquivalenz existiert genau eine Γ'-Spiegelscheibe $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{B}$ mit Spiegelungsordnung 4, so dass $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \subset \partial\mathbb{D}_0$ eine vollständige Menge Γ'-inäquivalenter Spitzen für die Quotientenkurve $\mathbb{D}_0/\Gamma'_0$ ist.

(*iii*) Bis auf Γ'-Äquivalenz gibt es genau drei Γ'-Spiegelscheiben $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}_3$ mit Spiegelungsordnung 4, die auf dem Rand $\partial\mathbb{D}_j$ bis auf Γ'_j-Äquivalenz genau eine Spitze κ_j tragen ($j = 1, 2, 3$).

(*iv*) Jede Γ'-Spiegelscheibe ist zu einer der vier oberen Γ'-äquivalent.

(*v*) Bis auf Γ'-Äquivalenz existieren genau drei Γ'-elliptische Punkte O_1, O_2, O_3 in $\mathbb{B}$. Sie koinzidieren mit den Schnittpunkten $O_j = \mathbb{D}_k \cap \mathbb{D}_l$, $\{j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$ (bei geeigneter Wahl der Scheiben). Die Isotropiegruppe Γ'_{O_j} entspricht der abelschen Gruppe der Ordnung 16, erzeugt durch Spiegelungen der Ordnung 4, die die Punkte von $\mathbb{D}_k$ bzw. $\mathbb{D}_l$ fixieren.

(*vi*) Das Euler-Bergmann-Volumen eines Γ'-Fundamentalbereichs ist $\frac{3}{16}$.

(*vii*) Es gibt eine zu S_3 isomorphe Untergruppe $\sum_3$ von $\mathrm{Aut}(\mathbb{B})$, die Γ' normalisiert, auf $\mathbb{D}_0$ operiert und $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}_3$ permutiert.

In [HV] (Theorem 9.1.) wird gezeigt, dass das Gitter $\Gamma' = \Gamma(1 + i)$ diese Bedingungen erfüllt. Genauer gelten die folgenden zwei Theoreme.

Satz 2.2 *(siehe [HV], Theorem 8.2.) Ist Γ' ein arithmetisches Gitter, das den Postulaten $(i) - (vii)$ genügt, dann ist $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma'}$ die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$. Der kompaktifizierte Verzweigungsort der Quotientenabbildung $p : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}/\Gamma'$ besteht aus einer* ebenen Apolloniuskonfiguration*, d.h. einer Quadrik $\hat{C}_0$ und drei Tangenten $\hat{C}_j$, $j = 1, 2, 3$. Die Kurven sind die (kompaktifizierten) Bilder der Scheiben $\mathbb{D}_0$ respektive $\mathbb{D}_j$, $j = 1, 2, 3$. Bis auf $\mathbb{P}\mathrm{Gl}_3$-Äquivalenz gibt es (bis auf S_3-Symmetrie) eindeutig bestimmte projektive Koordinaten auf $\mathbb{P}^2$,*

so dass die projektiven Geraden $\hat{C}_j$, $j \neq 0$ die Koordinatenachsen sind und die Quadrik durch

$$\hat{C}_0 : (X+Y-Z)^2 - 4XY = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ = 0$$

gegeben ist.

Satz 2.3 *(siehe [HV], Theorem 9.1) Das arithmetische Ballgitter $\Gamma(1+i)$ erfüllt die Bedingungen $(i) - (vii)$.*

Statt des oben definierten Balls $\mathbb{B}$ arbeiten wir mit einem ($\mathbb{PGL}_3(\mathbb{Z}[i])$-) transformierten Gebiet $\mathbb{B}_H$ des (homogenen) Balls. Die Notationen und Resultate lassen sich auf den transformierten Ball und das (isometrische) Gitter $\mathbb{PU}(H, \mathbb{Z}[i])$ (s. [HV], Ch. 9, [Ho98], Ch. 4) übertragen.

Um die Monodromiegruppen

$$\begin{array}{l} M_0 = M(\widetilde{\Psi}_0) =< g(\delta_1), \ldots, g(\delta_8) >, \quad \mathbb{P}M_0 := \Gamma'_0, \\ M_1 =< g(\delta_1), \ldots, g(\delta_6) >, \quad \mathbb{P}M_1 := \Gamma'_1, \\ M = M(\widetilde{\Psi}) =< g(\delta_1), \ldots, g(\delta_5) >, \quad \mathbb{P}M = \Gamma' \end{array}$$

arithmetisch zu beschreiben sei

$$\begin{array}{l} G = \mathbb{U}(H, \mathbb{Z}[i]) = \{g \in \mathbb{GL}_3(\mathbb{Z}[i]);\ {}^t g H \bar{g} = H\}, \quad \Gamma = \mathbb{PU}(H, Z[i]), \\ G_1 = G(1+i) = \{g \in G;\ g \equiv E_3 \mod (1+i)\}, \quad \Gamma_1 = \mathbb{P}G_1. \end{array}$$

Satz 2.4 *(siehe [Ma], Proposition 2.2.)*

(1) $\Gamma_1 = \Gamma'_1$

(2) $\Gamma = \Gamma'_0$

(3) $[\Gamma_1 : \Gamma'] = 2$.

Zu einem Gitter $\tilde{\Gamma}$ bezeichne $\tilde{\Gamma}_P$ den Stabilisator von $P \in \mathbb{B}_H \cup \partial_{\tilde{\Gamma}} \mathbb{B}_H$.

Lemma 2.5 *Für die Stabilisatoren von $\kappa = (0:1:0)$ ist*

(i) $\Gamma_{1,\kappa} = \Gamma'_{1,\kappa}$

(ii) $\Gamma_\kappa = \Gamma'_{0,\kappa}$.

Beweis von Lemma 2.5. Sei $g \in \mathbb{G}\mathrm{l}_3(\mathbb{C})$ mit $g\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mu \neq 0$ und ${}^t g H \bar{g} = |\lambda|^2 H$ $(0 \neq \lambda \in \mathbb{C})$. Bis auf einen Faktor k hat g die Gestalt

$$kg = g_{a,b,c,\theta} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b + \frac{|c|^2}{2} i & a & -\bar{c}\sqrt{a}\exp(i\theta) \\ -ci & 0 & \sqrt{a}\exp(i\theta) \end{pmatrix},$$

mit $0 < a \in \mathbb{R},\ b, \theta \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$.
Der Stabilisator von κ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_H) = \mathbb{P}\mathbb{U}(H, \mathbb{C})$ ist daher gegeben durch

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_H)_\kappa =: \mathbb{P}S_\kappa = \mathbb{P}\left\{g_{a,b,c,\theta};\ 0 < a \in \mathbb{R},\ b, \theta \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C}\right\}.$$

Für $g_{a,b,c,\theta} \in S_\kappa$ ist $kg_{a,b,c,\theta}$ genau dann ein Element aus $\mathbb{U}(H, \mathbb{Z}[i])$, wenn $k \in \{\pm 1, \pm i\}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c = m + in \in \mathbb{Z}[i]$, $m \equiv n \mod 2$ und $\exp(i\theta) = i^\nu$, $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ist zusätzlich $b \equiv m \mod 2$, dann ist $g_{a,b,c,\theta} \equiv E_3 \mod (1+i)$.
Sei

$$g(m, n, b, \nu) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b + \frac{m^2+n^2}{2} i & 1 & -(m - ni)i^\nu \\ n - mi & 0 & i^\nu \end{pmatrix}.$$

Die Stabilisatoren Γ_κ bzw. $\Gamma_{1,\kappa}$ von κ sind

$$\begin{aligned} \Gamma_\kappa &= \mathbb{P}\{g(m, n, b, \nu);\ m, n, b, \nu \in \mathbb{Z}, m \equiv n\ (2)\}, \\ \Gamma_{1,\kappa} &= \mathbb{P}\{g(m, n, b, \nu);\ m, n, b, \nu \in \mathbb{Z}, m \equiv n \equiv b\ (2)\}. \end{aligned}$$

(i) Wir zeigen, dass die Transformationen der Gestalt $g(m, n, b, \nu)$, $m, n, b, \nu \in \mathbb{Z}$, $m \equiv n \equiv b\ (2)$ durch $g(1, 1, 1, 0)$ und $g(0, 0, 0, 1)$ erzeugt werden. Da $g(1, 1, 1, 0) = g(\delta_6)g(\delta_1)g(\delta_3)$ und $g(0, 0, 0, 1) = g(\delta_6)$ in M enthalten sind (und $M \subset G_1$) ist dann $\Gamma_{1,\kappa} = \Gamma'_{1,\kappa}$.
Sei $n = m + 2k \equiv b \mod 2$
(a) $k \leq 0$. Für beliebige $r \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} g_r(m, n, b, \nu) &:= g(0, 0, 0, 1)g(1, 1, 1, 0)^k g(0, 0, 0, 1)g(1, 1, 1, 0)^r g(m, n, b, \nu) \\ &= g(-m(r), -m(r), b(r), \nu + 2), \end{aligned}$$

wobei $m(r) = -m - r - k$, $b(r) = b + k + r + 2^r k - 2^r(m - k)$. Ist r genügend groß, erreichen wir $b(r) \leq m(r)$. Seien also r und $s \geq 0$ so gewählt, dass $b(r) = m(r) - 2s$. Es ist

$$g(1, 1, 1, 0) = g(1, 1, 1, 0)^{-m(r)+s} g(0, 0, 0, 1)^2 g(1, 1, 1, 0)^s g_r(m, n, b, \nu) g(0, 0, 0, 1)^{3\nu}$$

und da

$$g(1,1,1,0)^{-1} = g(0,0,0,1)^3 g(1,1,1,0)^3 g(0,0,0,1) \qquad \text{sowie}$$
$$g(0,0,0,1)^{-1} = g(0,0,0,1)^3$$

lässt sich $g(m,n,b,\nu)$ als Produkt der $g(1,1,1,0)$ und $g(0,0,0,1)$ darstellen.
(b) $k > 0$. Da $g(0,0,0,1)^2 g(m,n,b,\nu) = g(-n,-m,b,\nu+2)$ und die rechte Seite unter (a) fällt, folgt auch die Behauptung aus (a).

(ii) Da $g(m,n,b,\nu)g(0,0,1,0) = g(m,n,b+1,\nu)$ sind alle $g(m,n,b,\nu)$, $m \equiv n$ (2) durch $g(1,1,1,0)$, $g(0,0,0,1)$ und $g(0,0,1,0) = -g(\delta_8)$ erzeugt, ergo $(\Gamma_0' \subset \Gamma)$ ist $\Gamma_\kappa = \Gamma'_{0,\kappa}$.

□

Beweis von Satz 2.4.
(1) Wegen $G_1' \subset G_1$ haben wir eine kanonische Projektion $p_1 : \mathbb{B}_H/\Gamma_1' \longrightarrow \mathbb{B}_H/\Gamma_1$. Nach den Sätzen 2.2 und 2.3 ist die Baily-Borel-Kompaktifizierung $\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma_1} = \mathbb{P}^2$. Wir zeigen, dass p_1 (außerhalb endlich vieler Punkte) unverzweigt ist. Da $\mathbb{P}^2\backslash\{\text{endl. viele Pkt.}\}$ einfach zusammenhängend ist und unverzweigte Überlagerungen mit Untergruppen der Fundamentalgruppe korrespondieren, kann p_1 keine Überlagerung vom Grad größer 1 sein und somit stimmen Γ_1 und Γ_1' $(\Gamma_1' \subset \Gamma_1)$ überein.

Γ_1 besitzt (Satz 2.2) drei inäquivalente Spitzen, die repräsentiert werden durch $\kappa_1 = (1:0:0)$, $\kappa_2 = (0:1:0)$ und $\kappa_3 = (1:1:0)$.
Sei $\kappa = \kappa_2$, $\hat\kappa$ bzw. $\hat\kappa'$ das Bild in $\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma_1}$ bzw. $\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma_1'}$.

(α) p_1 ist lokal bei $\hat\kappa$ unverzweigt.

Aufgrund der eigentlich diskontinuierlichen Wirkung eines Ball-Gitters $\tilde\Gamma$ auf $\mathbb{B}_H$ bzw. $\mathbb{B}_H^* = \mathbb{B}_H \cup \partial_{\tilde\Gamma}\mathbb{B}_H$ existiert für jedes $P \in \mathbb{B}_H^*$ eine kleine analytische Umgebung U, so dass $\{g \in \tilde\Gamma;\ gU \cap U \neq \emptyset\} = \tilde\Gamma_P$.
Da nach Lemma 2.5 $\Gamma_{1,\kappa}$ mit $\Gamma'_{1,\kappa}$ übereinstimmt, finden wir eine punktierte Umgebung $\dot U \subset \mathbb{B}_H$ von κ in der gilt

$$P \sim_{\Gamma_1} Q \iff P \sim_{\Gamma_1'} Q \quad \forall P, Q \in \dot U$$

Auf dem Bild von $\dot U$ in $\mathbb{B}_H/\Gamma_1$ ist die Überlagerung demnach unverzweigt.

(β) p_1 ist unverzweigt bei den Spitzen.

$g(\delta_8)g(\delta_7)$ resp. $g(\delta_7)^{-1}$ transformieren κ_2 nach κ_1 bzw. κ_3.
Die Isotropiegruppen Γ_{1,κ_j}, $j = 1, 3$ sind also von

$$g(\delta_7)^{-1}g(1,1,1,0)g_7 = g(\delta_2)g(\delta_6)^3, \quad g(\delta_7)^{-1}g(0,0,0,1)g(\delta_7) = g(\delta_6)$$

für κ_3 bzw. im Fall κ_1 von

$$\begin{aligned} g(\delta_8)g(\delta_7)g(1,1,1,2)(g(\delta_8)g(\delta_7))^{-1} &= -ig(\delta_3)g(\delta_4)g(\delta_6)^3, \\ (g(\delta_8)g(\delta_7))g(0,0,0,1)(g(\delta_8)g(\delta_7))^{-1} &= g(\delta_3) \end{aligned}$$

erzeugt ($g(1,1,1,0) = g(1,1,1,2)g(0,0,0,1)^2$) und stimmen demnach mit den Stabilisatorgruppen Γ_{1,κ_j} überein.
p_1 ist somit lokal bei den drei Spitzen $\hat{\kappa}_j$ unverzweigt.

(γ) p_1 ist außerhalb möglicher Singularitäten von $\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma'}$ unverzweigt.

Sei Sg der singuläre Ort von $\mathbb{B}_H/\Gamma'_1$. Der kompaktifizierte Verzweigungsort $\pi_1 : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{B}_H/\Gamma_1$ ist eine Apolloniuskonfiguration mit Verzweigungsgewichten 4 außerhalb der Spitzen. Ist $\hat{C}' \subset \widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma'_1}$ eine Verzweigungskurve von p_1, dann liegt $\hat{C}'$ über einer Kurve $\hat{C} \subset \mathbb{P}^2$ der Apolloniuskonfiguration. In $\mathbb{B}_H$ gibt es also eine Spiegelscheibe $\mathbb{D}$, so dass $\mathbb{B}_H^* \supset \hat{\mathbb{D}} \twoheadrightarrow \hat{C}$ mit Ordnung 4 verzweigt ist. Da p_1 lokal bei einer Spitze $\hat{\kappa} \in \hat{C}$ unverzweigt ist (das Verzweigungsgewicht auf $\hat{C}$ und $\hat{C}'$ ist außerhalb der Singularitäten konstant) ist $\mathbb{D} \to C'$ ebenfalls lokal bei $\hat{\kappa}'$ und damit global über C' (außerhalb des singulären Orts) verzweigt vom Gewicht 4 und somit ist p_1 unverzweigt über C.
Insgesamt bleibt als möglicher Verzweigungsort nur noch der singuläre Ort $Sg \subset \widehat{\mathbb{B}/\Gamma'_1}$ bzw. das Bild $p_1(Sg)$. Da Sg und p_1 endlich sind, ist $p_1(Sg)$ endlich und $p_1 : \widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma'_1}\backslash Sg \longrightarrow \widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma_1}\backslash p_1(Sg) = \mathbb{P}^2\backslash\{\text{endlich viele Punkte}\}$ eine unverzweigte Überlagerung einer einfach zusammenhängenden Fläche und demnach vom Grad 1.

(*ii*) Da $\Gamma'_0 \subset \Gamma$ haben wir wieder eine Projektion $p_0 : \mathbb{B}_H/\Gamma'_0 \longrightarrow \mathbb{B}_H/\Gamma$. Die Spitzen κ_1, κ_2, κ_3 sind Γ'_0-äquivalent (s.o.) und die Stabilisatoren Γ_κ und $\Gamma'_{0,\kappa}$ stimmen überein (Lemma 2.5). p_0 ist demnach lokal bei dem Bild von κ in $\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma}$ unverzweigt und vom Grad 1 ($\mathbb{B}_H/\Gamma_1 \to \mathbb{B}_H/\Gamma'_0$ ist vom Grad 3) also global unverzweigt.

(*iii*) Da offenbar $g(\delta_6) \notin G$ ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \neq \mathbb{P}^2$) und $g(\delta_6)^2 = g(\delta_3) \in G$ ist $[G_1 : G] = 2$.

□

3 Ein Schottky-Taniyama-Ring

Ziel dieses Kapitels ist es, ausgehend von K. Matsumotos Konstruktion der Abbildung $\widetilde{\Psi}^{-1} : \mathbb{B}_H \longrightarrow \Lambda$ durch Produkte von Thetakonstanten die Projektion $p_{\Gamma_1} : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2 = \widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma_1}$ mittels $\Gamma_1 = \Gamma(1+i)$-Modulformen zu beschreiben. Einerseits werden wir durch diese Modulformen das Schottky-Problem für die Kurvenfamilie F lösen, d.h. zu gegebenem Periodenpunkt τ in $\mathbb{B}_H$ die definierende Gleichung einer Kurve mit diesem Periodenpunkt finden und zum zweiten werden wir mittels dieser Formen eine j-Funktion erhalten, deren Werte in CM-Punkten abelsche Erweiterungen des Reflexkörpers liefern.

3.1 Schottky-Formen

Die *Riemannsche Theta-Funktion*

$$\Theta(z,\Omega) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\ {}^t n\Omega n + 2\pi i\ {}^t nz)$$

definiert eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$.
Für Vektoren $p, q \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^g$ wird die *Theta-Funktion mit (halb-ganzer) Charakteristik* $\begin{bmatrix} 2\ {}^t p \\ 2\ {}^t q \end{bmatrix}$ definiert durch

$$\begin{aligned}\Theta \begin{bmatrix} 2\ {}^t p \\ 2\ {}^t q \end{bmatrix} (z,\Omega) &:= \exp(\pi i\ {}^t p\Omega p + 2\pi i\ {}^t p(z+q))\Theta(z+\Omega p,\Omega) \\ &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\ {}^t(n+p)\Omega(n+p) + 2\pi i\ {}^t(n+p)(z+q)).\end{aligned}$$

Die auf $\mathbb{H}_g$ definierte Funktion $\Theta \begin{bmatrix} 2\ {}^t p \\ 2\ {}^t q \end{bmatrix} (\Omega) := \Theta \begin{bmatrix} 2\ {}^t p \\ 2\ {}^t q \end{bmatrix} (0,\Omega)$ heißt *Theta-Konstante*.
Ist $g = 3$ und $\mu : \mathbb{B}_H \hookrightarrow \mathbb{H}_3, (u,v) \mapsto \Omega(u,v)$ die oben definierte Einbettung (Kap. 2, (5)) des Balls in die Siegelsche Halbebene, dann definieren wir durch

$$\Theta \begin{bmatrix} 2\ {}^t p \\ 2\ {}^t q \end{bmatrix} (u,v) := \Theta \begin{bmatrix} 2\ {}^t p \\ 2\ {}^t q \end{bmatrix} (\mu(u,v))$$

Theta-Charakteristiken auf dem Ball.

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Zu einer Normalbasis von $H_1(X,\mathbb{Z})$ wählen wir eine Basis $\omega_1, \ldots, \omega_g$ der holomorphen

Differentialformen, so dass die Periodenmatrix die Gestalt (Ω, E_g) hat.
Sei $\omega = {}^t(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ und $P_0 \in X$ ein fixierter Punkt. Sind $\sum_{j=1}^d R_j$, $\sum_{j=1}^d Q_j$ Divisoren vom selben Grad mit $\sum_{j=1}^d \int_{P_0}^{R_j} \omega \equiv \sum_{j=1}^d \int_{P_0}^{Q_j} \omega \mod \mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$, dann exisiert nach dem Theorem von Abel eine meromorphe Funktion f auf X mit Nullstellendivisor $(f)_0 = \sum_{j=1}^d R_j$ und Poldivisor $(f)_\infty = \sum_{j=1}^d Q_j$. Explizit kann f dargestellt werden durch

$$f(P) = \prod_{i=1}^{d} \frac{\Theta(e - \int_{\tau_i} \omega + \int_{\delta_P} \omega, \Omega)}{\Theta(e - \int_{\gamma_i} \omega + \int_{\delta_P} \omega, \Omega)}$$

mit einem geeigneten Vektor $e \in \mathbb{C}^g$ und Wegen γ_i von P_0 nach R_i, τ_i von P_0 nach Q_i, so dass

$$\sum_{i=1}^{d} \int_{\gamma_i} \omega = \sum_{i=1}^{d} \int_{\tau_i} \omega$$

und einem festen Weg δ_P von P_0 nach P (siehe [Mu], Ch. II, §3, Beweis des Theorems von Abel).
Wir fixieren nun auf einer Faserkurve wieder die Homologiebasis $\{B_j, A_k\}$ (Kap. 2, (1)) und eine entsprechende Basis ${}^t\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ der holomorphen 1-Formen.
Der Divisor der Projektion

$$f : \widetilde{C}(x, y) \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (z, w) \mapsto z,$$

ist $(f) = 2P_{01} + 2P_{02} - 2P_{\infty 1} - 2P_{\infty 2}$. Wählen wir als Basispunkt P_y und Integrationswege γ_i und τ_i wie folgt

- γ_i, τ_i seien Wege von P_y nach P_{0i} bzw. $P_{\infty i}$ in der Komponente σ_i für $i = 1, 2$,
- γ_i, τ_i seien Wege von P_y nach P_{0i-2} bzw. $P_{\infty i-2}$ in der Komponente σ_i für $i = 3, 4$,

dann ist

$$\sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \omega = \sum_{i=1}^{4} \int_{\tau_i} \omega$$

und bis auf eine Konstante r_e, die von e abhängt, hat f die Gestalt

$$r_e f(P) := \prod_{i=1}^{4} \frac{\Theta(e - \int_{\gamma_i} \omega + \int_{\delta_P} \omega, \Omega)}{\Theta(e - \int_{\tau_i} \omega + \int_{\delta_P} \omega, \Omega)} \tag{6}$$

mit einem fixiertem Weg δ_P von P_y nach P.
Setzen wir P_x, P_y, P_{11} und P_{12} in (6) ein, erhalten wir Ausdrücke für $r_e x$, $r_e y$ und r_e in denen die Integrale im Argument als Halbperioden vorkommen. Mit der speziellen Wahl von $e = e_1 = \frac{1}{2}\Omega \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ (für die Darstellung von x) bzw. $e = e_2 = \frac{1}{2}\Omega \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ (für den Ausdruck von y) lassen sich die Terme als Thetakonstanten beschreiben.

Satz 3.1 *([Ma], Theorem 3.4) Die Abbildung* $\widetilde{\Psi}^{-1} : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *hat eine Darstellung der Gestalt* $\widetilde{\Psi}^{-1}(u,v) = (\frac{\phi_1}{\phi_0}(u,v), \frac{\phi_3}{\phi_2}(u,v)) = (x,y)$ *mit*

$$\phi_0 := \left(\Theta \begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\right)^2,$$

$$\phi_1 := \left(\Theta \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\right)^2,$$

$$\phi_2 := \left(\Theta \begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right)^2,$$

$$\phi_3 := \left(\Theta \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\right)^2,$$

wobei $\Theta \left[\begin{smallmatrix}{}^t p\\ {}^t q\end{smallmatrix}\right] := \Theta \left[\begin{smallmatrix}{}^t p\\ {}^t q\end{smallmatrix}\right] (0, \mu(u,v))$.

Die Gruppen $\mathbb{U}(H, \mathbb{Z}[i])$ und $\mathbb{S}\mathrm{p}(6,\mathbb{Z})$ wirken durch

$$g(u,v) = \left(\frac{g_{21} + g_{22}u + g_{23}v}{g_{11} + g_{12}u + g_{13}v}, \frac{g_{31} + g_{32}u + g_{33}v}{g_{11} + g_{12}u + g_{13}v}\right),\ g = (g_{ij}) \in \mathbb{U}(H, \mathbb{Z}[i]) \quad \text{bzw.}$$

$$\gamma(\Omega) = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1},\ \gamma = \left(\begin{smallmatrix}A & B\\ C & D\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{S}\mathrm{p}(6,\mathbb{Z})$$

auf $\mathbb{B}_H$ bzw. $\mathbb{H}_3$.
Seien $G' \subset U(H, \mathbb{Z}[i])$, $N' \subset \mathbb{S}\mathrm{p}(6, \mathbb{Z})$ Untergruppen von endlichem Index. Eine holomorphe Funktion $\phi : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine *G'-Modulform* vom Gewicht k, falls

$$\phi(g(u,v)) := (g_{11} + g_{12}u + g_{13}v)^k \phi(u,v) \qquad \forall g = (g_{ij}) \in G',$$

$\psi : \mathbb{H}_3 \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine *Siegelsche Modulform* vom Gewicht k bezüglich N', wenn ψ holomorph ist und

$$\psi(\gamma(\Omega)) = \det(C\Omega + D)^k \psi(\Omega) \qquad \forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in N'.$$

Sind $n(\delta_j)$ (siehe [Ma], (2.4) und (2.6)) die den Erzeugenden $g(\delta_j)$ der Monodromiegruppen M_0 entsprechenden symplektischen Transformationen, so ist $N =< n(\delta_1), \ldots, n(\delta_5) > \subset \mathbb{S}\mathrm{p}(6, \mathbb{Z})$ die Monodromiegruppe der Abbildung $\Psi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{H}_3$.

Seien $\psi_j : \mathbb{H}_3 \longrightarrow \mathbb{C}$ die Produkte von Thetakonstanten, so dass

$$\psi_j|_{\mu^{-1}(\mathbb{B}_H)} = \phi_j \circ \mu^{-1} : \mu(\mathbb{B}_H) \longrightarrow \mathbb{C}$$

und $n(\delta_k) = \left(\begin{smallmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{smallmatrix}\right)$, $g(\delta_k) = (g(\delta_k)_{lr})$ $(j = 0, \ldots, 4;\ k = 1, \ldots, 8)$.
Für $k = 1, \ldots, 6$ liegen die symplektischen Matrizen $n(\delta_k)$ in der Igusagruppe $\Gamma_{12} = \{\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{S}\mathrm{p}(6, \mathbb{Z});$ Diagonalelemente von ${}^tAD$ und ${}^tBC$ sind gerade$\}$ und auf Elemente dieser Gruppe lässt sich die Transformationsformel für Thetakonstanten

$$\begin{aligned} &\Theta \begin{bmatrix} 2\ {}^t(Dp - Cq) \\ 2\ {}^t(-Bp + Aq) \end{bmatrix} ((A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}) \\ &\quad = \zeta_\gamma \sqrt{\det(C\Omega + D)} \exp(\pi i(-\ {}^t(Bp)Dp + 2\ {}^t(Bp)Cq - \\ &\qquad -\ {}^t(Aq)Cq)) \Theta \begin{bmatrix} 2\ {}^tp \\ 2\ {}^tq \end{bmatrix} (\Omega) \end{aligned} \tag{7}$$

mit einer achten Einheitswurzel ζ_γ, die nur von $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{12}$ abhängt $(\Omega \in \mathbb{H}_3,\ p, q \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^3)$ anwenden (siehe [Mu], Ch. II, §5).
Mittels der Transformationsformel zeigt Matsumoto, dass die ψ_j N-Modulformen vom Gewicht 4 sind. Da $\mu \circ g(\delta_k) = n(\delta_k) \circ \mu$ und $|\det(C_k\mu(u,v) + D_k)| = (g(\delta_k)_{11} + g(\delta_k)_{12}u + g(\delta_k)_{13}v)^2$, folgt hieraus der

Satz 3.2 *([Ma], Theorem 4.1.) Die Funktionen $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ sind Modulformen zur Monodromiegruppe M vom Gewicht 8.*

Um die Quotientenabbildung $\mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{B}_H/\Gamma_1$, $\Gamma_1 = \Gamma(1+i)$ durch Modulformen zu beschreiben betten wir zunächst $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mittels der Veronese-Abbildung nach $\mathbb{P}^3$ ein und beschreiben die $K \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ entsprechende Wirkung auf der Bildquadrik. Der Automorphismus k_1 geht dabei in eine Spiegelung über und der Quotient der Quadrik nach dieser Spiegelungsgruppe entspricht der projektiven Ebene. Die Komposition der konstruierten Abbildungen ist schließlich durch $\Gamma(1+i)$-Modulformen gegeben und koinzidiert mit der kanonischen Quotientenabbildung.
Sei dazu

$$v : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3,\ \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{y_1}{y_0}\right) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1)$$

die Veronese-Einbettung.
Die Bildquadrik $V \subset \mathbb{P}^3$ ist definiert durch die Gleichung $V : Z_0Z_3 - Z_1Z_2 = 0$ (Veronese-Quadrik). Die Abbildung vom Ball in die Veronese-Quadrik erhalten wir mittels der M-Modulformen vom Gewicht 16, definiert durch

$$\chi_0 := \phi_0\phi_2,\ \chi_1 := \phi_0\phi_3,\ \chi_2 := \phi_1\phi_2,\ \chi_3 := \phi_1\phi_3$$

und damit einen Isomorphismus $\widehat{B_H/\Gamma'} \cong V$.
Sei $[M,k]$ die $\mathbb{C}$-Algebra der M-Modulformen vom Gewicht k, $R[M] := \oplus_{k\in\mathbb{N}}[M,k]$ der graduierte Ring der Modulformen ($\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma'} = \mathrm{Proj}(R[M])$). Weiter sei $R'[M] := \mathbb{C}[\chi_0,\chi_1,\chi_2,\chi_3] \subset R[M]$ der von den χ_j erzeugte graduierte Unterring. Der Körper der Modulfunktionen entspricht dem homogenen Quotientenkörper $R(M) := Q^h(R[M]) = \{\frac{f}{g};\ 0 \neq g, f \in [M,k]\}$ und ist der Funktionenkörper von $\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma'} = \hat{X}_{\Gamma'}$. Aus den von v und $\widetilde{\Psi}^{-1}$ induzierten Isomorphismen zwischen $\hat{X}_{\Gamma'}$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und V folgt für die Funktionenkörper, dass $R(M) = \mathbb{C}(\frac{\phi_1}{\phi_0}, \frac{\phi_3}{\phi_2}) = Q^h(R'[M])$ gilt und schließlich die

Proposition 3.3 *Mit den obigen Notationen ist*

$$\mathrm{Proj}(R[M]) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong V.$$

Seien $S, R, T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3) = \mathbb{PG}\mathrm{l}_4(\mathbb{C})$ Transformationen repräsentiert durch

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da S, R und T die Veronese-Quadrik stabil lassen, wirkt die von den drei Transformationen erzeugte Gruppe $<S,R,T>$ auf V. Wegen

$$v \circ k_1 = S \circ v,\ v \circ k_2 = R \circ v,\ v \circ k_3 = T \circ v$$

geht die Wirkung der Gruppe K auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in die $<S,R,T>$-Operation auf V über und wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma'} & \cong & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \cong & V \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma_1} & \cong & (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)/<k_1> & \cong & V/<S> \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma} & \cong & (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)/K & \cong & V/<S,R,T>\ . \end{array} \tag{8}$$

Die S-Aktion auf $\mathbb{C}\chi_0 + \ldots + \mathbb{C}\chi_3$ lässt sich durch $S : f(\chi_0,\chi_1,\chi_2,\chi_3) \mapsto f(\chi_0,\chi_2,\chi_1,\chi_3)$ zu einer Wirkung auf dem homogenen Koordinatenring der Veronese-Quadrik $\mathbb{C}[V] := \mathbb{C}[\chi_0,\chi_1,\chi_2,\chi_3] \cong \mathbb{C}[Z_0,Z_1,Z_2,Z_3]/(Z_0Z_3 - Z_1Z_2)$ fortsetzen. Da $\ker(S-id) = (\chi_1-\chi_2)$ und $\ker(S+id) = (\chi_0,\chi_1+\chi_2,\chi_3)$ erhalten wir als Ring der S-invarianten Formen $R'[M]^{<S>} = \mathbb{C}[\chi_0,\chi_1+\chi_2,\chi_3] =: \mathbb{C}[t_0,t_1,t_2]$ den Koordinatenring einer projektiven Geraden und eine Zerlegung $R'[M] = \mathbb{C}[t_0,t_1,t_2] + \mathbb{C}[t_0,t_1,t_2](\chi_1-\chi_2)$.

Proposition 3.4 *Der Morphismus*

$$F : V \longrightarrow \mathbb{P}^2,\ (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (z_0 : z_1 + z_2 : z_3)$$

induziert einen Isomorphismus $V/<S> \cong \mathbb{P}^2$ projektiver Varietäten und führt zur Quotientenabbildung

$$(t_0 : t_1 : t_2) : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2,\ (u,v) \mapsto (t_0(u,v) : t_1(u,v) : t_2(u,v))$$

mit Modulformen $t_0 := \chi_0$, $t_1 := \chi_1 + \chi_2$, $t_2 := \chi_3$ zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma(1+i)$ vom Gewicht 16.

Beweis. Da F auf V definiert ist und die Funktionenkörper von $V/<S>$ und $\mathbb{P}^2$ übereinstimmen, bleibt lediglich zu zeigen, dass die t_i Γ_1-Modulformen vom angegeben Gewicht sind. Per Konstruktion sind sie als Summe von Zweierprodukten von M-Modulformen vom Gewicht 8 Formen in $[M,16]$. Es bleibt also $t_j(g(\delta_6)(u,v)) = (g(\delta_6)_{11} + g(\delta_6)_{12}u + g(\delta_6)_{13}v)^{16} t_j(u,v) = t_j(u,v)$ zu verifizieren. Beim Beweis der Modularität der ϕ_j zeigt Matsumoto das folgende

Lemma 3.5 *(siehe [Ma], Lemma 4.2.) Es gilt*

$$\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^2=-\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}^2,$$
$$\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^2=-\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^2.$$

Da $\mu(g(\delta_6)(u,v))=\mu(u,iv)$ und (siehe [Ma], Sublemma 4.3)

$$\Theta\begin{bmatrix}2p_1&2p_2&2p_3\\2q_1&2q_2&2q_3\end{bmatrix}(\mu(u,iv))=\exp(-4\pi ip_2q_2)\Theta\begin{bmatrix}2p_2&2p_1&2p_3\\2q_2&2q_1&2q_3\end{bmatrix}(\mu(u,v))$$

erhält man aus dem Hilfssatz
$\phi_0\phi_2(g(\delta_6)(u,v))=\phi_0\phi_2(u,v)$, $\phi_1\phi_3(g(\delta_6)(u,v))=\phi_1\phi_3(u,v)$ sowie
$(\phi_0\phi_3+\phi_1\phi_2)(g(\delta_6(u,v))=(\phi_2\phi_1+\phi_3\phi_0)(u,v)$ und damit die Behauptung.

□

Die sieben Geraden $H: xy(x-1)(y-1)(x-y)=0\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ gehen durch $F\circ v:\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\longrightarrow\mathbb{P}^2$ in die Konfiguration $\hat{C}_0'\cup\hat{C}_1'\cup\hat{C}_2'\cup\hat{C}_3'\subset\mathbb{P}^2$ über, mit einer Quadrik $\hat{C}_0': T_1^2-4T_0T_2=0$ und Tangenten $\hat{C}_1': T_2=0$, $\hat{C}_2': T_0-T_1+T_2=0$, $\hat{C}_3': T_0=0$. Der Verzweigungsort der durch $(t_0:t_1:t_2)$ gegebenen Abbildung ist also eine ebene Apolloniuskonfiguration. Die Bilder der Schnittpunkte der Geraden $x=0,1,\infty$ mit der Diagonalen $x=y$ sind die kompaktifizierenden Punkte $K_1=(1:0:0)$, $K_2:=(1:2:1)$ und $K_3:=(0:0:1)$ (Schnittpunkte $\hat{C}_0'\cap\hat{C}_j'$) der Konfiguration.

Seien $R'[M]:=\mathbb{C}[\chi_0,\chi_1,\chi_2,\chi_3]$, $R'[G_1]=\mathbb{C}[t_0,t_1,t_2]$ die von den χ_j bzw. t_j erzeugten graduierten Ringe. Mit $R'[M]^d:=[M,d]\cap R'[M]$ und $R'[G_1]^d:=[G_1,d]\cap R'[G_1]$ bezeichnen wir die in $R'[M]$ bzw. $R'[G_1]$ enthaltenen Modulformen vom Gewicht d (bzgl. M resp. G_1) und mit $R'[M]_0^d$, $R'[G_1]_0^d$ die Spitzenformen (Modulformen, die in den Spitzen verschwinden). Modulformen vom Gewicht $16d$ in $R'[G_1]$ ensprechen den homogenen Elementen vom Grad d in $\mathbb{C}[t_0,t_1,t_2]$, da die Erzeugenden Formen vom Gewicht 16 sind. Die Dimension (als Vektorraum) von $R'[G_1]^{16d}$ ist demnach $\binom{d+2}{d}=d^2/2+3d/2+1$. Die Forderung in den Spitzen K_1,K_2,K_3 zu verschwinden liefert drei zusätzliche lineare Bedingungen an die Koeffizienten einer Modulform. Der Raum der Spitzenformen vom Gewicht $16d$ hat demnach Dimension $d^2/2+3d/2-2$.
Die Dimensionen von $R'[M]^{16d}$ und $R'[M]_0^{16d}$ resultieren aus der Zerlegung

$R'[M] = \mathbb{C}[t_0,t_1,t_2] + \mathbb{C}[t_0,t_1,t_2](\chi_1 - \chi_2)$ indem wir $\dim R'[G_1]^{16d}$ einsetzen. Wir erhalten $\dim R'[M]_0^{16d} = \binom{d+2}{d} + \binom{d+1}{d-1} = (d+1)^2 = d^2 + 2d + 1$ und $\dim R'[M]_0^{16d} = \dim R'[G_1]_0^{16d} + \dim R'[G_1]^{16(d-1)} = d^2 + 2d - 2$, da $\chi_1 - \chi_0$ eine Spitzenform ist.
Die drei G_1-Spitzenformen vom Grad 16 sind beispielsweise $t_1^2 - 4t_0t_2$, $t_0t_1 - t_1t_2$ und $t_1^2 - t_1t_2$. Da die (linear unabhängigen) G_1-Modulformen $f_1 = 2t_0 - t_1$, $f_2 = t_1$, $f_3 = 2t_2 - t_1$ die Eigenschaft $f_i(K_j) = \delta_{ij}$ haben ist $R'[G_1]^{16d} = \mathbb{C}f_1^d + \mathbb{C}f_2^d + \mathbb{C}f_3^d + R'[G_1]_0^{16d}$.

Um die Quadrik in S_3-symmetrische Form zu bringen, müssen wir die projektive Ebene so transformieren, dass die Quadrik $\hat{C}_0' : T_1^2 = 4T_0T_2$ nach dem Koordinatenwechsel S_3-symmetrische Gestalt hat. Sei Q die symmetrische Matrix von $\hat{C}_0'$, $f_A : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$, $(t_0 : t_1 : t_2) \mapsto (t_0 : t_0 - t_1 + t_2 : t_2)$ und A die darstellende Matrix der Projektivität $f_A = f_A^{-1}$. In den transformierten Koordinaten hat Q die Gestalt

$$ {}^tAQA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. $$

Die Bildquadrik wird also nach dem Koordinatenwechsel durch $\hat{C}_0 : X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ = 0$ beschrieben und die Tangenten transformieren sich zu $\hat{C}_1 : X = 0$, $\hat{C}_2 : Y = 0$, $\hat{C}_3 : Z = 0$. Die Bilder der kompaktifizierenden Punkte sind wenig überraschend $(1:1:0)$, $(1:0:1)$ und $(0:1:1)$, d.h. der Verzweigungsort ist nach dieser Transformation der projektiven Ebene eine Apolloniuskonfiguration in S_3-symmetrischer Form.

Die Wirkung, der auf der Veronese-Quadrik operierenden Gruppe $< R, T >$, geht auf $\mathbb{P}^2$ in die Aktion von $< R', T' >$ über, wobei

$$ R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; T' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Diese Operation wiederum wird nach dem Koordinatenwechsel f_A eine durch Koordinatenpermutation gegebene $S_3 =< R_1, T_1 >$-Wirkung, da

$$ R_1 = A^{-1}RA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; T_1 = A^{-1}TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Um den Ring der invarianten Funktionen zu finden, müssen wir uns überlegen, wie sich die elementarsymmetrischen Polynome durch f_A transformieren

(σ ist genau dann invariant unter R und T, wenn ${f_A^*}^{-1}\sigma = \sigma \circ f_A^{-1}$ invariant unter der S_3-Wirkung ist). Seien $s_1(X,Y,Z) = X+Y+Z$, $s_2(X,Y,Z) = XY+XZ+YZ$, $s_3(X,Y,Z) = XYZ$ die elementarsymmetrischen Polynome in $\mathbb{C}[X,Y,Z]$. Mit $\sigma_1(T_0,T_1,T_2) := T_0+T_2+(T_0-T_1+T_2)$, $\sigma_2(T_0,T_1,T_2) := (T_0+T_2)(T_0-T_1+T_2)+T_0T_2$ und $\sigma_3(T_0,T_1,T_2) := T_0T_2(T_0-T_1+T_2)$ ist $\sigma_j := f_A^* s_j$ und somit

$$\mathbb{C}[T_0,T_1,T_2]^{<R',T'>} = \mathbb{C}[\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]. \tag{9}$$

Satz 3.6 *Die Abbildung* $(g_0 : g_1 : g_2) : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2$, $\tau \mapsto (g_0(\tau) : g_1(\tau) : g_2(\tau))$, *wobei* $g_0(\tau) := t_0(\tau)$, $g_1(\tau) := (t_0 - t_1 + t_2)(\tau)$, $g_2(\tau) := t_2(\tau)$ *ist durch* $\Gamma(1+i)$*-Modulformen vom Gewicht 16 gegeben und entspricht (bis auf Kompaktifizierung) der kanonischen Projektion* $p_{\Gamma_1} : \mathbb{B}_H \to \mathbb{B}_H/\Gamma_1$. *Der kompaktifizierte Verzweigungsort auf* $\mathbb{P}^2$ *ist eine ebene Apolloniuskonfiguration in* S_3*-symmetrischer Form. Weiter gilt*

(i) (Schottky-Problem-Lösung) Ist $\tau \in \mathbb{B}_H$ *ein Periodenpunkt der Kurvenfamilie, dann hat die zugehörige Isomorphieklasse einen Repräsentanten* $\widetilde{C}_\tau := \widetilde{C}_{p_{\Gamma_1}(\tau)}$ *mit Gleichung*

$$w^4 = z^2(z-1)^2\left(z^2 - \frac{g_0(\tau)-g_1(\tau)+g_2(\tau)}{g_0(\tau)}z + \frac{g_2(\tau)}{g_0(\tau)}\right),$$

(ii) $\widetilde{C}_\tau \cong \widetilde{C}_{\tau'} \iff \tau \sim_\Gamma \tau' \iff p_{\Gamma_1}(\tau) \sim_{S_3} p_{\Gamma_1}(\tau')$.

Beweis. Nach Konstruktion (und wegen Propostion 3.4) entspricht $(g_0 : g_1 : g_2)$ der uniformisierenden Abbildung $\mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2$ mit S_3-symmetrischem Verzweigungsort. Die g_j sind $\Gamma(1+i)$-Modulformen vom Gewicht 16, da die t_j diese Eigenschaft haben. Aussage (i) erhält man direkt durch Einsetzen, da die Kurve $\widetilde{C} : w^4 = z^2(z-1)^2(z-\frac{\phi_1(\tau)}{\phi_0(\tau}})(z-\frac{\phi_3(\tau)}{\phi_2(\tau)})$ Periodenpunkt τ hat und $g_0 = \phi_0\phi_2$, $g_1 = \phi_0\phi_2 - (\phi_1\phi_2+\phi_0\phi_3)+\phi_1\phi_3$, $g_2 = \phi_1\phi_3$.
Da zwei Kurven der Familie genau dann isomorph sind, wenn die Parameter in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ K-äquivalent sind und die K-Wirkung in eine S_3-Koordinatenpermutation auf $\mathbb{P}^2$ übergeht folgt Aussage (ii).

□

Die Modulformen g_j bzw. χ_j sind also Schottky-Formen zur Kongruenzuntergruppe Γ_1 im Sinne von Definition 1.2. In Termen von Thetakonstanten haben sie die Darstellung

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \left(\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right]^2\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]^2\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]\right)^2\\
g_1 &= \left(\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right]^2\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]^2\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]\right)^2\\
&\quad-\left(\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]\right)^2\\
&\qquad\cdot\left(\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]\right)^2\\
&\quad-\left(\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{smallmatrix}\right]\right)^2\\
&\qquad\cdot\left(\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]\right)^2\\
&\quad+\left(\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right]^2\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]^2\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]\right)^2\\
g_2 &= \left(\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right]^2\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]^2\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]\Theta\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]\right)^2.
\end{aligned}
$$

Das Diagramm (8) können wir jetzt umschreiben zu

$$
\begin{array}{ccccc}
\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma'} & \cong & \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 & \cong & V\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma_1} & \cong & (\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)/<k_1> & \cong & \mathbb{P}^2\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma} & \cong & (\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)/K & \cong & \mathbb{P}^2/S_3.
\end{array}
\tag{10}
$$

3.2 Taniyama-Formen

Auf unseren uniformisierenden Morphismus $p_{\Gamma_1} : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2$ lassen sich nun die Ergebnisse aus [HPV] anwenden. Als Resultat erhalten wir eine j-Funktion, die auf dem Ball definiert ist und deren Werte in CM-Ballpunkten abelsche Erweiterungen des Reflexkörpers liefern.

Wir brauchen zunächst einige Definitionen und Resultate aus der Theorie der komplexen Multiplikation abelscher Varietäten (siehe [ST], [La] oder [Ho95]).
Ein Zahlkörper K ist ein *CM-Körper*, wenn K eine total imaginär-quadratische Erweiterung eines total rellen Zahlkörpers ist. Ein *CM-Typ* Φ_K eines CM-Körpers vom Grad $[K : \mathbb{Q}] = 2g$ ist eine Menge komplexer Einbettungen $\Phi_K := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_g\}$ von K, so dass

$$\varphi_i \neq \varphi_j \;\forall\; i \neq j \in \{1, \ldots, g\} \text{ und } \varphi_i \neq \bar{\varphi_j} \;\forall\; i, j \in \{1, \ldots, g\},$$

wobei $\bar{\varphi}$ die komplex konjugierte Einbettung $\bar{\varphi}(f) := \overline{\varphi(f)}$ bezeichnet. Die *Typenspur* $Tr_{\Phi_K} : K \longrightarrow \mathbb{C}$ eines Typs Φ_K ist definiert durch $Tr_{\Phi_K}(f) := \varphi_1(f) + \ldots + \varphi_g(f)$; der durch Adjunktion der Spuren zu $\mathbb{Q}$ resultierende Körper $K' := \mathbb{Q}(Tr_{\Phi_K}(K))$ heißt *Reflexkörper* von (K, Φ_K).
Wir betrachten komplexe abelsche Varietäten A als Tori $\mathbb{C}^g/\Lambda$ mit einem polarisierbaren Gitter Λ. A hat *K-Multiplikation*, wenn es eine ($\mathbb{Q}$-Algebra-) Einbettung $\iota : K \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) := \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ gibt. Angenommen die Varietät habe K-Multiplikation mit einem CM-Körper K vom Grad $2g$, dann besitzt A *komplexe Multiplikation* und wir nennen A eine *CM-Varietät*. *CM-Kurven* sind Kurven, deren Jacobische komplexe Multiplikation haben; Periodenpunkte von CM-Kurven nennen wir *CM-Punkte*.
Sei nun $A = \mathbb{C}^g/\Lambda$ eine CM-Varietät mit Multiplikationskörper K vom Grad $[K : \mathbb{Q}] = 2g$. Ein Endomorphismus $f \in K$ lässt sich zu einer linearen Abbildung $R_{\mathbb{C}}(f) : \mathbb{C}^g \cong T_0A \longrightarrow T_0A$ (des Tangentialraums an A in 0) anheben, der wiederum einen $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $R_{\mathbb{Q}}(f) : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ induziert. Wir haben daher ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C}^g & \longrightarrow & \mathbb{C}^g/\Lambda \\ {\scriptstyle R_{\mathbb{Q}}(f)}\downarrow & & {\scriptstyle R_{\mathbb{C}}(f)}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C}^g & \longrightarrow & \mathbb{C}^g/\Lambda. \end{array}$$

Durch Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ erhalten wir für jedes $f \in \mathrm{End}(A)_{\mathbb{Q}}$ Homomorphismen $R_{\mathbb{Q}}(f) : \Lambda_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen und die beiden Darstellungen

$$\begin{array}{ll} R_{\mathbb{C}} : & \mathrm{End}(A)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow Mat(g \times g; \mathbb{C}),\ f \mapsto R_{\mathbb{C}}(f) \quad \text{(komplexe Darstellung)}, \\ R_{\mathbb{Q}} : & \mathrm{End}(A)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow Mat(2g \times 2g; \mathbb{Q}),\ f \mapsto R_{\mathbb{Q}}(f) \quad \text{(rationale Darstellung)}. \end{array}$$

Die komplexe Darstellung $R_{\mathbb{C}}$ des kommutativen CM-Körpers zerfällt in g eindimensionale Darstellungen $\varphi_i : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit Charakteren φ_i. $R_{\mathbb{C}}$ ist daher äquivalent zu einer Diagonalform $D_{\Phi_K} : f \mapsto \mathrm{diag}(\varphi_1(f), \ldots, \varphi_g(f))$. Da die rationale Darstellung $R_{\mathbb{Q}}$ äquivalent ist zur direkten Summe $R_{\mathbb{C}} \oplus \bar{R}_{\mathbb{C}}$, ist $\Phi_K = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_g\}$ ein CM-Typ für K. Wir sagen in diesem Fall, dass A eine Multiplikation vom Typ Φ_K bzw. (K, Φ_K) hat.

Ist A eine abelsche CM-Varietät, dann existiert eine Einbettung in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^m$, so dass die eingebettete Varietät durch Gleichungen

$$F_1 = \ldots = F_m = 0,\ F_j \in k[X_1, \ldots, X_m]$$

über einem Zahlkörper k definiert ist (siehe [La], Ch. 5, Proposition 1.1.). Sei $\bar{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$. Die Gruppe der k fixierenden Automorphismen $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/k)$ von $\bar{\mathbb{Q}}$ wirkt durch Transformation der Koeffizienten auf den algebraischen Punkten (der über k definierten projektiven abelschen CM-Varietät) $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Für ein $\sigma \in Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $F(X_1, \ldots, X_m) = \sum a_I X_1^{i_1} \ldots X_m^{i_m}$ sei $F^\sigma(X_1, \ldots, X_m) := \sum \sigma(a_I) X_1^{i_1} \ldots X_m^{i_m}$. Die σ-transformierte Varietät A^σ ist dann durch die Gleichungen $F_1^\sigma = \ldots = F_m^\sigma = 0$ definiert. Wir setzen $Stab(A) := \{\sigma;\ A^\sigma \cong A\}$. Der *Modulkörper* von A ist definiert als

$$M(A) := \bar{\mathbb{Q}}^{Stab(A)}.$$

Nach G. Shimura ([Sh63], [Sh64]) dient der Ballquotient $\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma}$, $\Gamma = \mathbb{PU}(H, \mathbb{Z}[i])$ als Modulraum der hauptpolarisierten abelschen Varietäten vom Geschlecht 3 (abelsche 3-folds) mit einer $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation vom Typ (2,1), d.h. dass die Einschränkung der komplexen Darstellung auf $\mathbb{Q}(i)$ äquivalent ist zu $\mathrm{diag}(id, id, \bar{id})$.
Der auf den Kurven $\widetilde{C}(x, y)$ definierte Automorphismus $\rho(z, w) = (z, iw)$ induziert durch $\rho : \int_Q^P \eta \mapsto \int_Q^{\rho(P)} \eta = \int_Q^P \eta \circ \rho$ einen Endomorphismus der Ordnung 4 auf den Jacobischen (und somit eine $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation). Auf der Basis der 1-Formen $\eta_1 = dz/w$, $\eta_2 = z(z-1)dz/w^3$, $\eta_3 = z^2(z-1)dz/w^3$ ist $\eta_1 \circ \rho = -i\eta_1$, und $\eta_j \circ \rho = i\eta_j$, $j = 2, 3$. Ist $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ die duale Basis, dann ist $\rho \circ \epsilon_1 = -i\epsilon_1$ und $\rho \circ \epsilon_j = i\epsilon_j$ $(j = 2, 3)$. Zusammen haben wir also $\mathbb{Q}(i) \ni i \mapsto \rho \mapsto \mathrm{diag}(-i, i, i)$ und daher eine $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation vom Typ (2,1).
Da nach dem Theorem von Torelli ([BL], Ch. 11, §1, Theorem 1.7) zwei Kurven aus F genau dann isomorph sind, wenn ihre (hauptpolarisierten) Jacobischen isomorph sind und der (kompaktifizierte) Modulraum der Kurvenfamilie durch $\mathbb{P}^2/S_3 \cong \widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma}$ gegeben ist, stimmen die Modulräume der hauptpolarisierten abelschen Varietäten vom Geschlecht 3 mit einer $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation vom Typ (2,1) und der Kurvenfamile F überein.

Betrachten wir wieder die (durch Schottky-Formen) definierte Projektion

$$p_{\Gamma_1} : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2, \quad \tau \mapsto (g_0(\tau) : g_1(\tau) : g_2(\tau)) =: (z_0 : z_1 : z_2).$$

Mit dem in [HPV] (Kapitel 9) vorgeschlagenen Weg können wir nun eine j-Funktion als Quotient der Modulformen g_j konstruieren, die in CM-Punkten Klassenkörper liefert.

Sei $(0,0,0) \neq z = (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$, $\zeta = (z_0 : z_1 : z_2) = \mathbb{P}z \in \mathbb{P}^2$.
Wir definieren (siehe [HPV], (47) und (48)) die homogenen Polynome

$$\begin{aligned} H_1(z) &:= z_0z_1(z_0+z_1) + z_0z_2(z_0+z_2) + z_1z_2(z_1+z_2) \\ H_2(z) &:= z_0(z_0+z_1)(z_0+z_2) + z_1(z_0+z_1)(z_1+z_2) + z_2(z_0+z_2)(z_1+z_2) \\ s_3(z) &:= z_0z_1z_2. \end{aligned}$$

und die korrespondierenden Funktionen

$$J_1(\zeta) := H_1(z)/s_3(z), \quad J_2(\zeta) := H_2(z)/s_3(z).$$

$J_1(\zeta)$ und $J_2(\zeta)$ sind rationale Funktionen auf $\mathbb{P}^2$ und mittels

$$J(\zeta) := (J_1(\zeta), J_2(\zeta)) = (H_1(z) : H_2(z) : s_3(z))$$

respektive $j(\tau) := (j_1(\tau), j_2(\tau)) := J(p_{\Gamma_1}(\tau))$ erhalten wir meromorphe Abbildungen auf der projektiven Ebene bzw. dem Ball. J faktorisiert über $\mathbb{P}^2/S_3$ und ist außerhalb der drei Punkte $Q_1 = (0:1:-1)$, $Q_2 = (1:0:-1)$, $Q_3 = (1:-1:0)$ definiert. Insbesondere liegen die drei Punkte auf der Apolloniuskonfiguration. Die meromorphe Abbildung $j(\tau)$ ist daher wohldefiniert und analytisch außerhalb des Urbilds der Konfiguration und somit in allen CM-Punkten definiert ([HPV], Theorem 9.3). Die Parameter isomorpher Kurven werden nach Konstruktion durch eine S_3-Permutation ineinander überführt. Auf der anderen Seite sind die J_i nach Definition symmetrisch in den Koordinaten. Damit lässt sich der folgende Satz zeigen.

Satz 3.7 *(siehe [HPV], Proposition 9.4) Liegt $\zeta = (z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2$ nicht auf der Apolloniuskonfiguration und ist $z_0 + z_1 + z_2 \neq 0$, dann ist der Modulkörper der Kurve $\widetilde{C}_\tau$ über $\mathbb{Q}$ durch $J(\zeta)$ erzeugt, m.a.W. es gilt $M(\widetilde{C}_\tau) = \mathbb{Q}(J(\zeta)) = \mathbb{Q}(j(\tau))$.*

Für CM-Varietäten A_τ mit CM-Körper K und Reflexkörper K' ist der erweiterte Modulkörper $K'M(A_\tau)$ eine abelsche Erweiterung von K' (siehe [Ho95], Ch. IV).

Satz 3.8 *([HPV], Theorem 9.6) Sei $\tau \in \mathbb{B}$ ein CM-Punkt der Kurvenfamilie F, $g_0(\tau) + g_1(\tau) + g_2(\tau) \neq 0$, $K = \mathbb{Q}(i, \tau)$ die korrespondierende kubische Erweiterung von $\mathbb{Q}(i)$, K' der Reflexkörper bezüglich $A_\tau \cong \mathrm{Jac}(\widetilde{C}_{p_{\Gamma_1}(\tau)})$. Dann ist $K'(j(\tau))/K'$ eine abelsche Erweiterung von K'.*

Die Funktionen t_0, t_1, t_2 bzw. g_0, g_1, g_2 sind also Schottky-Taniyama-Formen zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_1 = \Gamma(1+i)$, die Ringe $\mathbb{C}[t_0, t_1, t_2]$ bzw. $\mathbb{C}[g_0, g_1, g_2]$ entsprechend Schottky-Taniyama-Ringe.
Meromorphe Funktionen auf $\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma}$ entsprechen S_3-invarianten Funktionen auf $\mathbb{P}^2$. Da der erzeugende Ring durch $\mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \cong \mathbb{C}[s_1, s_2, s_3]$ (siehe (9)) gegeben ist, ist der Funktionenkörper $Mer(\widehat{\mathbb{B}_H/\Gamma}) = \mathbb{C}(j_1, j_2)$.

Um die j-Funktion explizit zu gewinnen setzen wir die Modulformen bzw. Thetakonstanten ein und erhalten ($j = (H_1 : H_2 : s_3)$):

$$\begin{aligned}
H_1 &= 7(\phi_0^2\phi_1\phi_2^2\phi_3 + \phi_0\phi_1^2\phi_2\phi_3^2) + 2(\phi_0^3\phi_2^3 + \phi_1^3\phi_3^3) + \phi_1^3\phi_2^2\phi_3 + \phi_0^2\phi_1\phi_3^3 \\
&\quad +\phi_0\phi_1^2\phi_2^3 + \phi_0^3\phi_2\phi_3^2 - 3(\phi_0^2\phi_1\phi_2^3 + \phi_0^3\phi_2^2\phi_3 + \phi_1^3\phi_2\phi_3^2 + \phi_0\phi_1^2\phi_3^3) \\
&\quad -4(\phi_0\phi_1^2\phi_2^2\phi_3 + \phi_0^2\phi_1\phi_2\phi_3^2) \\
H_2 &= 17(\phi_0^2\phi_1\phi_2^2\phi_3 + \phi_0\phi_1^2\phi_2\phi_3^2) + 4(\phi_0^3\phi_2^3 + \phi_1^3\phi_3^3 + \phi_0\phi_1^2\phi_2^3 + \phi_0^3\phi_2\phi_3^2) \\
&\quad +4(\phi_1^3\phi_2^2\phi_3 + \phi_0^2\phi_1\phi_3^3) - (\phi_1^3\phi_2^3 + \phi_0^3\phi_3^3) \\
&\quad -6(\phi_0^2\phi_1\phi_2^3 + \phi_0^3\phi_2^2\phi_3 + \phi_1^3\phi_2\phi_3^2 + \phi_0\phi_1^2\phi_3^3) - 14(\phi_0\phi_1^2\phi_2^2\phi_3 + \phi_0^2\phi_1\phi_2\phi_3^2) \\
s_3 &= \phi_0^2\phi_1\phi_2^2\phi_3 - \phi_0\phi_1^2\phi_2^2\phi_3 - \phi_0^2\phi_1\phi_2\phi_3^2 + \phi_0\phi_1^2\phi_2\phi_3^2)
\end{aligned}$$

und in Termen von Thetakonstanten $\Theta\begin{bmatrix} {}^tp \\ {}^tq \end{bmatrix} := \Theta\begin{bmatrix} {}^tp \\ {}^tq \end{bmatrix}(0, \mu(u,v))$

$$
\begin{aligned}
H_1 = \quad & 7 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^4 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2 \\
& +7 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^8 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4 \\
& +2 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{12}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{12}\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^6 \\
& +2 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{12}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{12}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6 \\
& + \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^4 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2 \\
& + \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^8 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6 \\
& + \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^4 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^6 \\
& + \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4 \\
& -3 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^2 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^6 \\
& -3 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2 \\
& -3 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^2 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4 \\
& -3 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{10} \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^6 \\
& -4 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^6 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2 \\
& -4 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^6 \\
& \quad \Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_2 = \quad & 17 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
& +17 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\\
& +4 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{12}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{12}\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^6\\
& +4 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{12}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{12}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\\
& +4 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^6\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\\
& +4 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\\
& +4 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4\\
& +4 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
& - \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^6\\
& - \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^6\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\\
& -6 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^6\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
& -6 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
& -6 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2\\
& -6 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^6\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{10}\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\\
& -14 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4\\
& -14 \quad \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\\
& \quad\ \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_3 \;=\;& \Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\\
&\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
&\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
-\;&\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\\
&\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\\
&\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
-\;&\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^4\\
&\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^6\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\\
&\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\\
+\;&\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^2\\
&\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^8\Theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4\\
&\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^2\Theta\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4\Theta\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^4
\end{aligned}
$$

Literatur

[AVG] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zasade, A.N. Varchenko: Singularities of Differentiable Maps, Vol.II, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1988

[BHH] G. Barthel, F. Hirzebruch, T. Höfer: Geradenkonfigurationen und Algebraische Flächen, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1987

[BK] E. Brieskorn, H. Knörrer: Ebene algebraische Kurven, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1981

[BL] H. Lange, C. Birkenhake: Complex Abelian Varieties, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992

[DM] P. Deligne, G. D. Mostow: Monodromy Of Hypergeometric Functions And Non-Lattice Integral Monodromy, Publ.Math.IHES **63** (1986), pp. 5-88

[Ha] R. Hartshorne: Algebraic Geometry, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977

[Ho95] R.-P. Holzapfel: The Ball and some Hilbert Problems, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1995

[Ho98] R.-P. Holzapfel: Ball and Surface Arithmetics, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1998

[HPV] R.-P. Holzapfel, A. Piñeiro, N. Vladov: Picard-Einstein Metrics and Class Fields Connected with Appollonius Cycle, HU preprint Nr. 98-15 (1998)

[HV] R.-P. Holzapfel, N. Vladov: Quadric-line configurations degenarating plane Picard Einstein metrics I-II, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jahrgänge 1997-2000, pp. 79-141

[La] S. Lang: Complex Multiplication, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1983

[Ma] K. Matsumoto: On Modular Functions in 2 Variables Attached to a Family of Hyperelliptic Curves of Genus 3, Sc. Norm. Sup. Pisa **16** No.4 (1989), pp. 557-578

[Mu] D. Mumford: Tata Lectures on Theta I-II, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983

[Sh63] G. Shimura: On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions, Ann. Math. **78** No.1 (1963), pp. 149-192

[Sh64] G. Shimura: On purely transcendental fields of automorphic functions of several variables, Osaka Journ. Math, **1** (1964), pp. 1-14

[ST] G. Shimura, Y. Taniyama: Complex Multiplication of Abelian Varieties and its Applications to Number Theory, Publ. Math. Soc. Japan No.6, Tokyo, 1961

[St] H. Stichtenoth: Algebraic Function Fields and Codes, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993

[Te] T. Terada: Fonctions hypergeometriques F_1 et fonctions automorphes I-II, J. Math. Soc. Japan **35** (1983), pp. 451-475, **37** (1985), pp. 173-185

[Yo] M. Yoshida: Fuchsian Differential Equations, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1987

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 24. Juni 2004

Thesen

Für die Kurvenfamilie $F := \bigcup_{(x,y)\in\Lambda} \widetilde{C}(x,y)$ hyperelliptischer Kurven $\widetilde{C}(x,y)$ vom Geschlecht 3 mit Modell

$$C(x,y) : w^4 = z^2(z-1)^2(z-x)(z-y),$$

Parameterraum $\Lambda = \mathbb{C}^2\backslash\{(x,y);\ xy(x-1)(y-1)(x-y) = 0\}$ und Modulraum $\mathbb{P}^2/S_3$ wurden Schottky-Taniyama-Formen g_0, g_1, g_2 zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_1 = \Gamma(1+i)$ der Modulgruppe $\Gamma = \mathbb{PU}(H, \mathbb{Z}[i])$ explizit in Termen von Thetakonstanten und eine j-Funktion als Quotient dieser Formen konstruiert mit den Eigenschaften

(*i*) g_0, g_1, g_2 sind Γ_1-Modulformen vom Gewicht 16; der homogene Quotientenkörper des von ihnen erzeugten (Schottky-Taniyama-) Rings $R'[\Gamma_1] = \mathbb{C}[g_0, g_1, g_2]$ stimmt mit dem Funktionenkörper von $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma_1} = \mathbb{P}^2$ überein,

(*ii*) zu gegebenem Periodenpunkt τ außerhalb des Verzweigungsort des uniformisierenden Morphismus $p_{\Gamma_1} = (g_0 : g_1 : g_2) : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2$ hat die Kurve $\widetilde{C}_\tau$ mit Modell

$$C_\tau : w^4 = z^2(z-1)^2\left(z^2 - \frac{g_0(\tau) - g_1(\tau) + g_2(\tau)}{g_0(\tau)}z + \frac{g_2(\tau)}{g_0(\tau)}\right)$$

Periodenpunkt τ,

(*iii*) $\widetilde{C}_\tau \cong \widetilde{C}_{\tau'} \iff j(\tau) = j(\tau') \iff p_{\Gamma_1}(\tau) \sim_{S_3} p_{\Gamma_1}(\tau')$, wobei S_3 durch Koordinatenpermutation wirkt,

(*iv*) j erzeugt (über $\mathbb{Q}$) den Körper der Modulfunktionen,

(*v*) für CM-Punkte τ ist $K'(j(\tau))$ ein Klassenkörper des Reflexkörpers K'.