Der Residuensatz, von der Funktionen- zur Codierungstheorie

von Stefanie Schmidt

betreut von Prof. Dr. R.-P. Holzapfel

25. März 2004

Vorwort

Der klassische Residuensatz ist ein zentraler Satz der Funktionentheorie. Er ist eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel, die 1831 von Cauchy gezeigt wurde. Voraussetzung für den Beweis ist der Cauchysche Integralsatz (1825). Dieser geht auf das Problem zurück, dass das komplexe Kurvenintegral nicht nur von Anfangs- und Endpunkt, sondern auch von der Wahl der Verbindungskurve abhängt. Ausgehend von einem Studium der komplexen Kurvenintegrale wollen wir im ersten Kapitel die klassische Version des Residuensatzes kennen lernen.
Auch in der Codierungstheorie findet der Residuensatz Anwendung. In den achtziger Jahren konstruierte V.D. Goppa seine Residuen-Codes über algebraischen Kurven. Mit Hilfe des Residuensatzes kann man zeigen, dass der rational-geometrische Goppa-Code und der residuelle Goppa-Code dual zueinander sind. Dies setzt voraus, dass wir uns mit der Theorie rationaler Funktionenkörper vertraut machen. Wir wollen auf dieser Grundlage im zweiten Kapitel die algebraische Version des Residuensatzes kennen lernen. Weiterführend betrachten wir im dritten Kapitel auch andere algebraische Funktionenkörper, für die der Residuensatz ebenfalls gilt. Unser Ziel ist es, den Residuensatz für beliebige Funktionenkörper F/K über einem algebraisch abgeschlossen K zu zeigen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Der klassische Residuensatz

Wir werden als Vorbereitung auf den Residuensatz zunächst einige Grundbegriffe bereitstellen und das komlexe Kurvenintegral für komplexwertige Funktionen einer komplexen Veränderlichen definieren.

1.1 Grundbegriffe

Zu den wichtigsten zu klärenden Grundbegriffen zählen der Begriff des Gebietes ([Pri58], S. 43-45), der Begriff einer stetigen Kurve im Jordanschen Sinne ([Pri58], S. 44) und der Begriff des komplexen Kurvenintegrals ([Pri54], S. 1-6). Die Mehrzahl aller Beispiele aus diesem Abschnitt stammt aus [Fre95], Kapitel II.1.

Definition 1.1.1. Eine offene Menge G der komplexen Zahlenebene heißt *Gebiet*, falls sich zwei beliebige Punkte aus G durch einen Polygonzug P so verbinden lassen, dass alle Punkte von P in G liegen.

Definition 1.1.2. (Definition einer stetigen Kurve im Jordanschen Sinne)
Sei $\alpha : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \to \mathbb{C}, t \mapsto \alpha(t)$ mit $a < b$ eine stetige Abbildung eines kompakten reellen Intervalls in die komlexe Zahlenebene. Bildet α stets zwei verschiedene Werte des Intervalls $[a, b]$ auf zwei verschiedene Punkte der Kurve ab, wobei $\alpha(a) = \alpha(b)$ erlaubt ist, dann heißt $C := \alpha([a, b])$ *(stetige) Kurve*.

Beispiel 1.1.1.

1. Die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten $z, w \in \mathbb{C}$, die durch $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = z + t(w - z)$ gegeben wird, ist eine Kurve.

2. Der Einheitskreis, gegeben durch $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = e^{2\pi it}$, ist eine Kurve.

Definition 1.1.3. Eine Kurve C mit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *geschlossen*, falls $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Definition 1.1.4. Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, falls das Innere einer beliebigen geschlossenen Kurve, die ganz in G liegt, vollständig in G liegt. Andernfalls heißt G *mehrfach zusammenhängend*.

Anschaulich sind die einfach zusammenhängenden Gebiete die Gebiete ohne „Löcher“.

Beispiel 1.1.2.

1. Jeder Teil der komplexen Zahlenebene, der das Innere einer beliebigen geschlossenen Kurve bildet, ist einfach zusammenhängend.

2. Sind $C_0, C_1, \ldots, C_n$ geschlossene Kurven in der komplexen Zahlenebene, so dass $C_1, \ldots, C_n$ im Innern von C_0 liegen und keine ganz im Innern einer anderen liegt, so ist das Gebiet, das im Innern von C_0 und außerhalb von allen $C_1, \ldots, C_n$ liegt, mehrfach zusammenhängend.
Und sind insbesondere K und k zwei Kreise mit Mittelpunkt a und Radien R und r, so dass $r < R$, so ist das Innere des von K und k begrenzten Gebietes mehrfach zusammenhängend. Wir bezeichnen die Menge $\mathfrak{R} := \{z \in \mathbb{C}, r < |z| < R\}$ als Ringebiet.

Definition 1.1.5.

1. C heißt *glatt*, falls α stetig differenzierbar ist.

2. Eine Kurve heißt *stückweise glatt*, falls es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ des kompakten reellen Intervalls gibt, so dass $\alpha_i := \alpha|_{[a_i, a_{i+1}]}$, $0 \leq i \leq n-1$ stetig differenzierbar sind. Wir bezeichnen dann die zugehörigen glatten Kurvenbögen mit $C_0, \ldots, C_{n-1}$.

3. Es seien C und $\tilde{C}$ zwei stückweise glatte Kurven mit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [b,c] \to \mathbb{C}$, und es gelte $\alpha(b) = \beta(b)$. Dann definieren wir $\alpha + \beta : [a,c] \to \mathbb{C}$ durch $(\alpha+\beta)(t) := \begin{cases} \alpha(t) & \text{für } a \leq t \leq b, \\ \beta(t) & \text{für } b \leq t \leq c \end{cases}$.
$\alpha + \beta$ ist eine stückweise glatte Kurve.

Beispiel 1.1.3. Durch folgende Abbildung können wir uns eine Dreieckskurve Δ oder kurz ein Dreieck definieren. Dazu bezeichnen wir die Eckpunkte des Dreiecks mit z_1, z_2, z_3.

$$\alpha(t) := (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(t) := \begin{cases} \alpha_1(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) & 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha_2(t) = z_2 + (t-1)(z_3 - z_2) & 1 \leq t \leq 2, \\ \alpha_3(t) = z_3 + (t-2)(z_1 - z_3) & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Definition 1.1.6. Sei C eine Kurve gegeben durch $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto \alpha(t)$. Das Bild der Abbildung $\alpha^- : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto \alpha(b+a-t)$ ist ebenfalls C. Wir sagen, dass C *positv durchlaufen wird*, falls wir uns auf α beziehen und schreiben dafür $C^+ =: C$. Andernfalls wird C *negativ durchlaufen* und wir schreiben C^-.

Definition 1.1.7. (Komplexes Kurvenintegral)
Es sei $f(z)$ eine in einem Gebiet G der komplexen Zahlenebene definierte und stetige komplexe Funktion und C eine beliebige glatte Kurve, die ganz in G liegt. Wir bezeichnen den Anfangspunkt von C mit A und den Endpunkt mit B. Wir zerlegen nun die Kurve C in eine beliebige Anzahl n von Teilbögen und nennen die Zerlegungspunkte, die in positiver Richtung auf C aufeinanderfolgen sollen, $A = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = B$. Wir bezeichnen mit ξ_i einen beliebigen Punkt (Stützstelle) auf dem Teilbogen zwischen z_i und z_{i+1} (einschließlich z_i, z_{i+1}). Dann nennen wir

$$\int_C f(z)dz := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(z_{i+1} - z_i)$$

das *(komplexe) Kurvenintegral* von f längs C.
Betrachten wir den Fall, dass C stückweise glatt ist, also aus den glatten Kurvenbögen $C_0, \ldots, C_{n-1}$ besteht, so definieren wir in diesem Falle

$$\int_C f(z)dz := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{C_i} f(z)dz.$$

Man kann zeigen, dass das Integral unter den gegebenen Voraussetzungen für jede Zerlegung von C und jede beliebige Wahl von Stützpunkten existiert und eindeutig ist.

Beispiel 1.1.4. Es sei C eine beliebige stückweise glatte Kurve. Bezeichnen wir mit z_0 den Anfangs- und mit z_n den Endpunkt der Kurve und gilt $z_0 = z_n$, so ist

1. $$\int_C dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = 0, \tag{1.1}$$

   da $\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1} - z_k) = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_0 - z_{n-1}) = 0$,

2.
$$\int_C z dz = 0. \tag{1.2}$$

Aus $\int_C z dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} z_k(z_{k+1} - z_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}(z_{k+1} - z_k)$, folgt
$$2\int_C z dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (z_k + z_{k+1})(z_{k+1} - z_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1}^2 - z_k^2).$$
Aus $(z_1^2 - z_0^2) + (z_2^2 - z_1^2) + \ldots + (z_0^2 - z_{n-1}^2) = 0$ folgt die Behauptung.

Wir haben bisher noch nicht die Frage beantwortet, wie man für eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und eine glatte Kurve $C \subset G$ das Integral von f längs C konkret berechnen kann. Ist uns C in der Gestalt $\alpha = \alpha(t)$ gegeben, so kann man zeigen, dass

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)dt.$$

Dementsprechend lässt sich das Integral von f längs einer stückweise glatten Kurve C mit Kurvenbögen $C_0, \ldots, C_n$ berechnen durch

$$\int_C f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\alpha_i(t))\alpha_i'(t)dt.$$

Definition 1.1.8. Wir wollen einige Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals angeben. Dazu benötigen wir noch folgende Definition.

1. Die *Bogenlänge einer glatten Kurve* C definieren wir durch

$$l(C) := \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt,$$

2. die *Bogenlänge einer stückweise glatten Kurve* C durch

$$l(C) := \sum_{i=0}^{n} l(C_i).$$

Bemerkung 1.1.1. Das komplexe Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften: Unmittelbar aus der Definition folgen 1. und 2.:

1. $$\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$$

2. $$\int_C af(z)dz = a\int_C f(z)dz \text{ für } a \in \mathbb{C}.$$

3. Es gilt die Abschätzung

$$\left|\int_C f(z)dz\right| < M \cdot l(C) \text{ falls } |f(z)| < M \text{ für } z \in C.$$

1.2 Der Cauchysche Integralsatz

In diesem Abschnitt richten wir unser Hauptaugenmerk auf die sogenannten *analytischen Funktionen*. Wir werden zeigen, dass die Gleichung

$$\int_C f(z)dz = 0$$

gilt, falls $f(z)$ eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G analytische Funktion und C eine innerhalb von G liegende beliebige geschlossene Kurve ist. Der Beweis dieses Satzes, es handelt sich hierbei um den *Cauchyschen Integralsatz*, geht auf den *Cauchyschen Integralsatz für Dreiecke* zurück. Die Sätze und Beweise dieses Abschnitts sind dem Paragraphen 2 des 1. Kapitels von [Pri54] entnommen.

Definition 1.2.1. Es sei G ein Gebiet der komplexen Zahlenebene und $f : G \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Ist f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar, so heißt f *analytisch*.
f heißt *analytisch (regulär) im Punkt* $z_0 \in G$, falls es eine offene Umgebung $U(z_0) \subset G$ gibt, so daß f in $U(z_0)$ analytisch ist.

Satz 1.2.1. *(Der Cauchysche Integralsatz für Dreiecke): Es sei $f(z)$ eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G analytische Funktion. Ist Δ ein innerhalb von G liegendes beliebiges Dreieck, so ist*

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Wir zeigen, dass $\int_{\Delta} f(z)dz = 0$, indem wir beweisen, dass $M := \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| = 0$. Dazu schätzen wir M nach oben ab. Wir konstruieren uns eine Folge von Dreiecken, indem wir die Seiten des vorgegebenen Dreiecks halbieren und die entstandenen Teilpunkte paarweise miteinander verbinden. Auf diese Weise erhalten wir vier kongruente Dreiecke $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ für die gilt, dass $\int_{\Delta} f(z)dz = \int_{\Delta_1} f(z)dz + \ldots + \int_{\Delta_4} f(z)dz$, da die Verbindungsstrecken zweier Teilpunkte sowohl in positiver als auch in negativer Richtung durchlaufen werden und sich so die entsprechenden Integrale gegenseitig aufheben. Wir können nun ein Dreieck Δ_i finden mit $\left|\int_{\Delta_i} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4}$. Denn wäre für jedes Dreieck $\left|\int_{\Delta_i} f(z)dz\right| < \frac{M}{4}$, so hätten wir

$$\begin{aligned} M &= \left|\int_{\Delta_1} f(z)dz + \ldots + \int_{\Delta_4} f(z)dz\right| \\ &\leq \left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| + \ldots + \left|\int_{\Delta_4} f(z)dz\right| \\ &< \frac{M}{4} + \frac{M}{4} + \frac{M}{4} + \frac{M}{4} = M. \end{aligned}$$

Es sei o.B.d.A $\Delta_1 =: \Delta_1^{(1)}$ das Dreieck für das $\left|\int_{\Delta_1^{(1)}} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4}$. Wir zerlegen das Dreieck $\Delta_1^{(1)}$ nun auf die gleiche Weise in vier kongruente Teildreiecke $\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(2)}, \Delta_4^{(2)}$und finden wieder ein Dreieck o.B.d.A $\Delta_1^{(2)}$ mit $\left|\int_{\Delta_1^{(2)}} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{M}{4} = \frac{M}{4^2}$. Nach $n-2$ weiteren Schritten ist $\left|\int_{\Delta_1^{(n)}} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{M}{4^{n-1}} = \frac{M}{4^n}$. Wir stellen fest, dass die Länge des Dreiecks $\Delta_1^{(i)}, i = 1, \ldots, n$ gleich $\frac{U}{2^i}$ ist, wenn wir die Länge von Δ mit U bezeichnen. Zusammenfassend haben wir eine Folge von Dreicken konstruiert, so dass

- die von den Eckpunkten des Dreiecks $\Delta_1^{(i+1)}$ aufgespannte Dreiecksfläche enthalten ist in der von den Eckpunkten des Dreiecks $\Delta_1^{(i)}$ aufgespannten Dreiecksfläche,

- die Längen der Dreiecke für $n \to \infty$ gegen 0 streben.

Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung gibt es einen eindeutigen Punkt z_0, der allen Dreiecksflächen gemeinsam ist. Da $f(z)$ analytisch ist in G, besitzt $f(z)$ in z_0 eine endliche Ableitung. Somit gibt es für beliebiges $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) = \delta$, so dass

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \text{ , falls } |z - z_0| < \delta.$$

Der Kürze halber setzen wir $r(z) := \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$. Multiplikation mit $|z - z_0|$ ergibt $|r(z)(z - z_0)| < \epsilon \cdot |z - z_0|$. Ab einem hinreichend großen n liegt das Dreick $\Delta_1^{(n)}$ innerhalb des Kreises um z_0 mit Radius δ. Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Delta_1^{(n)}} f(z)dz &= \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)(z - z_0)]dz \\
&= f(z_0) \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} dz + f'(z_0) \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} zdz - f'(z_0)z_0 \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} dz \\
&\quad + \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} r(z)(z - z_0)dz \\
&= \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} r(z)(z - z_0)dz,
\end{aligned}$$

da $\int_{\Delta_1^{(n)}} dz = 0$ und $\int_{\Delta_1^{(n)}} zdz = 0$. Für hinreichend großes n gilt für $z \in \Delta_1^{(n)}$, dass $|z - z_0| < \frac{U}{2^n} < \delta$ und zusammen mit $|r(z)| < \epsilon$ für $|z - z_0| < \delta$ erhalten wir mit Hilfe der Standardabschätzung

$$\left| \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} f(z)dz \right| < \epsilon \cdot \frac{U}{2^n} \cdot \frac{U}{2^n} = \frac{U^2}{4^n}.$$

Insgesamt haben wir mit $\left| \int_{\Delta_1^{(n)}} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4^n}$ die Ungleichung

$$\frac{M}{4^n} < \epsilon \frac{U}{4^n} \;\Leftrightarrow\; M < \epsilon U^2.$$

Da ϵ beliebig klein gewählt war, folgt $M = 0$. $\square$

Lemma 1.2.1. *Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und P ein Polygon, dass innerhalb von G liegt. Dann gibt es eine Zerlegung des Polygons durch Diagonalen in Dreiecke $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$ derart, dass sich das Integral von $f(z)$ längs P als Summe von Integralen längs der Δ_i darstellen lässt. In Zeichen*

$$\int\limits_P f(z)dz = \int\limits_{\Delta_0} f(z)dz + \int\limits_{\Delta_1} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{\Delta_k} f(z)dz.$$

Beweis. Wir wollen den Beweis nur für den Fall führen, dass die Fläche, die durch den geschlossenen Polygonzug bestimmt wird, konvex ist. Dazu betrachten wir einen derartigen geschlossenen Polygonzug P mit Teilstrecken l_i, $i = 0, \ldots, n-1$, die in positiver Richtung auf P aufeinanderfolgen. Wir bezeichnen die Anfangspunkte der Teilstrecken l_i mit z_i und die Endpunkte mit z_{i+1}. Wir zeichnen nun die Verbindungsstrecken von z_0 nach z_i für $i = 2, \ldots, n-2$ ein. Auf diese Weise zerlegen wir das Polygon P in $n-3$ Dreicke, die wir mit $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n-2}$ bezeichnen wollen. Integrieren wir f nun längs dieser entstandenen Teildreiecke in positiver Durchlaufrichtung, so erhalten wir

$$\int\limits_{\Delta_0} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{\Delta_{n-2}} f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{l_i} f(z)dz = \int\limits_P f(z)dz.$$

Da wir f längs jeder Diagonale sowohl in positiver als auch in negativer Richtung integrieren, bleibt als Wert des Integrals die Summe der Integrale von f längs der l_i übrig. □

Korollar 1.2.1. *(Der Cauchysche Integralsatz für Polygone): Es sei $f(z)$ eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G analytische Funktion. Ist P ein innerhalb von G liegendes beliebiges geschlossenes Polygon, so ist*

$$\int\limits_P f(z)dz = 0.$$

Beweis. Da sich das Integral von $f(z)$ längs P als Summe von Integralen von $f(z)$ längs von Dreiecken, wie oben konstruiert, darstellen lässt, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz für Dreiecke unmittelbar die Behauptung. □

Lemma 1.2.2. *Es sei $f(z)$ eine in einem Gebiet G definierte stetige Funktion. Ist C eine in G liegende stückweise glatte Kurve, so existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein C einbeschriebener, ganz in G liegender Polygonzug P derart, dass*

$$\left| \int\limits_C f(z)dz - \int\limits_P f(z)dz \right| < \epsilon.$$

Beweis. Wir betrachten ein abgeschlossenes Gebiet $\bar{D}$, das ganz in G liegt und C vollständig enthält. Da $f(z)$ in G stetig ist, ist $f(z)$ auch in $\bar{D}$ stetig, und es folgt, dass $f(z)$ damit auch gleichmäßig stetig in $\bar{D}$ ist. Damit eistiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) = \delta$, so dass $|f(z'') - f(z')| < \epsilon$ ist, falls $|z'' - z'| < \delta$, $z'', z' \in \bar{D}$.Wir zerlegen C in n Teilbogenstücke $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$, die in positver Richtung auf C aufeinanderfolgen, so dass die Länge jedes Teilbogenstückes kleiner ist als δ.Wir nennen die Zerlegungspunkte von C $z_0, z_1, \ldots, z_n$ und verbinden dieselben durch einen Polygonzug P, so dass die Teilstrecken $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ die Sehnen der entsprechenden Teilbogenstücke sind. Der Abstand zweier beliebiger Punkte einer Teilstrecke des Polygonzuges P ist nach Konstruktion der Zerlegung von C kleiner als δ. Wir vergleichen nun $\int_C f(z)dz$ mit $\int_P f(z)dz$, indem wir uns Näherungswerte für beide Integrale ansehen. Für $\int_C f(z)dz$ betrachten wir den Näherungswert

$$\begin{aligned} S &= f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{n-1})(z_n - z_{n-1}) \\ &= \int\limits_{s_0} f(z_0)dz + \int\limits_{s_1} f(z_1)dz + \ldots + \int\limits_{s_{n-1}} f(z_{n-1})dz, \end{aligned}$$

da $(z_{i+1} - z_i) = \int_{l_i} dz$. Andererseits ist

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{s_0} f(z)dz + \int\limits_{s_1} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{s_{n-1}} f(z)dz.$$

Damit ist

$$\int\limits_C f(z)dz - S = \int\limits_{s_0} (f(z) - f(z_0))dz + \ldots + \int\limits_{s_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1}))dz.$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f folgt für jedes Teilbogenstück s_i, dass $|f(z) - f(z_i)| < \epsilon$ für $z \in s_i$. Mit Hilfe der Standardabschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_C f(z)dz - S\right| &\leq \left|\int\limits_{s_0} (f(z) - f(z_0))dz\right| + \ldots + \left|\int\limits_{s_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1}))dz\right| \\ &< \epsilon \cdot l(s_0) + \epsilon \cdot l(s_1) + \ldots + \epsilon \cdot l(s_{n-1}) \\ &= \epsilon(l(s_0) + \ldots + l(s_{n-1})) = \epsilon \cdot l(C). \end{aligned}$$

Analog schätzen wir den Betrag von $\int_P f(z)dz - S$ ab. Da $(z_{i+1} - z_i) = \int_{l_i} dz$ folgt

$$\begin{aligned} S &= f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{n-1})(z_n - z_{n-1}) \\ &= \int\limits_{l_0} f(z_0)dz + \int\limits_{l_1} f(z_1)dz + \ldots + \int\limits_{l_{n-1}} f(z_{n-1})dz. \end{aligned}$$

Da $\int\limits_P f(z)dz = \int\limits_{l_0} f(z)dz + \int\limits_{l_1} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{l_{n-1}} f(z)dz$ ist, haben wir

$$\int\limits_P f(z)dz - S = \int\limits_{l_0} (f(z) - f(z_0))dz + \ldots + \int\limits_{l_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1}))dz.$$

Ebenso gilt für jede Teilstrecke l_i, dass $|f(z) - f(z_i)| < \epsilon$ für $z \in l_i$. Und mit Hilfe der Standardabschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_P f(z)dz - S\right| &\leq \left|\int\limits_{l_0} (f(z) - f(z_0))dz\right| + \ldots + \left|\int\limits_{l_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1}))dz\right| \\ &< \epsilon \cdot l(l_0) + \epsilon \cdot l(l_1) + \ldots + \epsilon \cdot l(l_{n-1}) \\ &= \epsilon(l(l_0) + \ldots + l(l_{n-1})) = \epsilon \cdot l(P). \end{aligned}$$

Wir schätzen nun den Betrag von $\int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz$ ab:

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_C f(z)dz - \int\limits_P f(z)dz\right| &= \left|\int\limits_C f(z)dz - S + S - \int\limits_P f(z)dz\right| \\ &\leq \left|\int\limits_C f(z)dz - S\right| + \left|S - \int\limits_P f(z)dz\right| \\ &< \epsilon \cdot (l(C) + l(P)) \end{aligned}$$

Da ϵ beliebig klein vorgegeben war, folgt die Behautung. □

Korollar 1.2.2. *(Der Cauchysche Integralsatz): Es sei $f(z)$ eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G analytische Funktion. Ist C eine innerhalb von G liegende beliebige geschlossene Kurve, so ist*

$$\int\limits_C f(z)dz = 0.$$

Beweis. Mit dem zuvor bewiesenen Lemma und dem Cauchyschen Integralsatz für Polygonzüge folgt unmittelbar die Behauptung. □

Satz 1.2.2. *(Der Cauchysche Integralsatz für mehrfach zusammenhängende Gebiete): Es sei G ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet und C eine* *zusammengesetzte Kurve, die aus endlich vielen, stückweise glatten, geschlossenen Kurven besteht und das Gebiet G begrenzt. Ist $f(z)$ eine in dem abgeschlossenen Gebiet $\bar{G}$ analytische Funktion, so ist*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Beweis. Es sei G ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet wie in 1.1.2, das von den stückweise glatten geschlossenen Kurven $C_0, C_1, \ldots, C_n$ begrenzt wird. Wir bezeichnen den Rand von G mit $C := C_0 + C_1^- + \ldots + C_n^-$, so dass die Punkte von G beim Durchlaufen der Kurve stets links liegen bleiben. Zum Beweis führen wir den Fall eines n+1 fach zusammenhängenden Gebietes auf den Fall einfach zusammenhängender Gebiete zurück. Dazu verbinden wir C_i mit C_{i+1}, $i = 0, \ldots, n-1$ und C_n mit C_0.Dadurch erhalten wir zwei einfach zusammenhängende Gebiete, deren Ränder wir mit γ_1 und γ_2 bezeichnen wollen. Da $f(z)$ in $\bar{G}$ analytisch ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete, dass

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 0 \text{ und } \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

Da wir $f(z)$ längs der Hilfslinien sowohl in positiver als auch in negativer Richtung integrieren und sich die entsprechenden Integralanteile gegenseitig aufheben, folgt bei Addition der Gleichungen

$$\int_C f(z)dz = 0. \qquad \square$$

Beispiel 1.2.1. Unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes lässt sich nun folgendes Integral leicht berechnen: Es sei C eine beliebige stückweise glatte, geschlossene, den Nullpunkt umschließende Kurve. Dann ist

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i. \tag{1.3}$$

Wir beschreiben um $z = 0$ als Mittelpunkt einen Kreis k mit Radius $r > 0$, der vollständig im Innern von C liegt. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ ist in dem abgeschlossenen Gebiet, das von C und k begrenzt wird, analytisch. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt dann

$$\int_C \frac{dz}{z} + \int_{k^-} \frac{dz}{z} = 0 \Leftrightarrow \int_C \frac{dz}{z} = \int_k \frac{dz}{z}.$$

Da $z \in k$, lässt sich z darstellen durch $z = Re^{i\varphi}$. Es folgt $dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$ und somit $\frac{dz}{z} = id\varphi$.Wir erhalten so $\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} id\varphi = 2\pi i$.

1.3 Die Cauchysche Integralformel

Wir hatten schon erwähnt, dass die *Cauchysche Integralformel* eine wichtige Grundlage für den Beweis des Residuensatzes darstellt. Betrachten wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet G, das von einer geschlossenen Kurve C begrenzt wird, und ist f eine Funktion , die in $\bar{G}$ analytisch ist, so drückt die Cauchysche Integralformel den Wert der Funktion f in jedem Punkt innerhalb von C durch die Werte der Funktion auf dem Rand C aus. Dieser Abschnitt bezieht sich hauptsächlich auf Paragraph 3 des 1. Kapitels von [Pri54].

Satz 1.3.1. *(Die Cauchysche Integralformel): Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und C eine beliebige stückweise glatte geschlossene Kurve, die G begrenzt. Ist f eine in dem abgeschlossenen Gebiet $\bar{G}$ analytische Funktion, so ist für jedes beliebige $z \in G$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Beweis. Es sei $z \in G$. Wir betrachten die Funktion $\varphi(\zeta) := \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$. Da f in $\bar{G}$ analytisch ist und da gilt, folgt, dass die Funktion $\varphi(\zeta)$ für jeden Punkt des abgeschlossenen Gebietes $\bar{G}$, ausgenommen im Punkt z, analytisch ist. Wir beschreiben nun um z als Mittelpunkt einen Kreis k mit Radius r so, dass k vollständig in G liegt, und bezeichnen das abgeschlossene Gebiet, das von C und k begrenzt wird, mit $\bar{G}'$. Nach Voraussetzung ist $\varphi(\zeta)$ in $\bar{G}'$ analytisch. Damit sind alle Voraussetzungen für den Cauchyschen Integralsatz für mehrfach zusammenhängende Gebiete erfüllt und somit gilt:

$$\int\limits_C \varphi(\zeta)d\zeta + \int\limits_{k^-} \varphi(\zeta)d\zeta = 0 \;\Leftrightarrow\; \int\limits_C \varphi(\zeta)d\zeta = \int\limits_k \varphi(\zeta)d\zeta.$$

Der Wert des Integrals $\int_k \varphi(\zeta)d\zeta$ hängt nicht vom Radius r ab, da $\int_C \varphi(\zeta)d\zeta$ ein fester Wert ist, r jedoch beliebig gewählt war. Wir bestimmen nun den Wert von $\int_C \varphi(\zeta)d\zeta$.
Da f nach Voraussetzung in $\bar{G}$ analytisch ist, existiert der wohlbestimmte endliche Grenzwert

$$\lim_{\zeta\to z} \varphi(\zeta) = \lim_{\zeta\to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z).$$

Wir definieren $\varphi(z) := f'(z)$ und erhalten so eine in $\bar{G}$ stetige Funktion. Diese ist in $\bar{G}$ beschränkt, so dass wir setzen können $|\varphi(\zeta)| < M$ für $\zeta \in k$. Wir können nun den Betrag des Integrals $\int_k \varphi(\zeta)d\zeta$ mittels der Standardabschätzung abschätzen. Da der Umfang des Kreises k gleich $2\pi r$ ist, folgt

$$\left|\int_k \varphi(\zeta)d\zeta\right| < M \cdot 2\pi r.$$

Da man aber den Radius r beliebig klein wählen kann, folgt, dass $\left|\int_k \varphi(\zeta)d\zeta\right| = 0$ und somit auch $\int_k \varphi(\zeta)d\zeta = 0$. Es ist dann

$$\begin{aligned} 0 = \int_k \varphi(\zeta)d\zeta = \int_C \varphi(\zeta)d\zeta &= \int_C \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta \\ \Leftrightarrow \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= f(z)\int_C \frac{1}{\zeta - z}d\zeta. \\ \text{Da} \int_C \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i, \text{ folgt} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= f(z)\cdot 2\pi i \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= f(z). \end{aligned}$$

□

Satz 1.3.2. *(Die Cauchysche Integralformel für mehrfach zusammenhängende Gebiete): Es sei G ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet und C eine zusammengesetzte Kurve, die aus endlich vielen, stückweise glatten, geschlossenen Kurven besteht und das Gebiet G begrenzt. Ist $f(\zeta)$ eine in dem abgeschlossenen Gebiet $\bar{G}$ analytische Funktion, so ist für jedes beliebige $z \in G$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Beweis. Es sei G ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet wie in 1.1.2, das von den stückweise glatten geschlossenen Kurven $C_0, C_1, \ldots, C_n$ begrenzt wird. Wir bezeichnenden den Rand von G mit $C := C_0 + C_1^- + \ldots + C_n^-$, so dass die Punkte von G beim Durchlaufen der Kurve stets links liegen bleiben. Zum Beweis beschreiben wir um z als Mittelpunkt einen Kreis K, so dass sowohl das Innere von K als auch K selbst ganz in G liegen. Wir bezeichnen das Gebiet, welches durch den Rand $C' := C_0 + C_1^- + \ldots + C_n^- + K^-$ begrenzt wird mit G'. Da die Funktion $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ in G' analytisch ist, folgt nach dem Cauchyschen Integralsatz für mehrfach zusammenhängende Gebiete

$$\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int_{K^-} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int_K \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Da $f(\zeta)$ sowohl im Innern von K als auch in K selbst analytisch ist, folgt aus dem vorherigen Satz $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$. Und da $\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = \int_K \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$, folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}. \qquad \square$$

1.4 Singularitäten analytischer Funktionen

Im Folgenden wird es darum gehen, die sogenannten isolierten Singularitäten analytischer Funktionen zu klassifizieren. Diese spielen in Bezug auf den Residuensatz eine große Rolle. Wir werden noch sehen, dass das Residuum einer Laurentreihe von f in $z - a$ wesentlich davon abhängt, um welche Art von Singularität es sich bei a handelt. Wir beziehen uns in diesem Abschnitt auf [Fre95], $S.129 - 139$.

Definition 1.4.1. Es sei G ein Gebiet der komplexen Zahlenebene und $f : G \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Ist $a \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $a \notin G$, so dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$\dot{U}_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$$

ganz in G enthalten ist, so nennen wir a eine *(isolierte) Singularität von $f(z)$*.

Definition 1.4.2.
1. Eine Singularität a einer analytischen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *hebbar*, falls sich f auf ganz $G \cup \{a\}$ analytisch fortsetzen lässt. Dabei lässt sich f auf ganz $G \cup \{a\}$ fortsetzen, falls es eine analytische Funktion $\tilde{f} : G \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $\tilde{f} \mid G = f$ gilt.
2. Eine Singularität a einer analytischen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *außerwesentlich*, falls es ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $g(z) := (z - a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität in a hat. a heißt *wesentlich*, falls sie nicht außerwesentlich ist.

Beispiel 1.4.1.
1. Die Funktion $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ist im Nullpunkt nicht definiert. Setzen wir $f(0) := \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, so sehen wir, dass $f(z)$ in $a = 0$ eine hebbare Singularität hat. Hebbare Singularitäten sind außerwesentlich, denn es gilt $m = 0$.
2. Die Funktion $f(z) = \frac{1+z}{z^2}$ ist ebenfalls im Nullpunkt nicht definiert. Sie hat in $a = 0$ keine hebbare Singularirät, weil f in jeder punktierten Umgebung $\dot{U}_r(a) \subset G$ unbeschränkt ist (Riemannscher Hebbarkeitssatz). Setzen wir $m = 2$, so hat die Funktion $g(z) := z^2 f(z) = 1 + z$ in

$a = 0$ eine hebbare Singularität. Damit ist $a = 0$ eine außerwesentliche Singularität von $f(z)$, die nicht hebbar ist.

3. Die Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat in $a = 0$ eine wesentliche Singularität, da sie in der Nähe von $a = 0$ ein ziemlich nervöses Verhalten aufweist. Eine Begründung liefern wir mit dem nächsten Satz nach.

Definition 1.4.3. Wir nennen eine außerwesentliche Singularität, die nicht hebbar ist, *Pol* oder *Polstelle*.

Die Funktion $f(z) = \frac{1+z}{z^2}$ hat demnach in $a = 0$ einen Pol. Wir können mit folgender Bermerkung die Polordnung eines Pols a definieren.

Bemerkung 1.4.1. Ist a eine außerwesentliche Singularität einer analytischen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, so gibt es eine kleinste ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$, so dass $g(z) = (z - a)^k f(z)$ eine hebbare Singularität in a hat, falls f in keiner Umgebung von a identisch verschwindet.

Man kann zeigen, dass eine außerwesentliche Singularität a von f ein Pol genau dann ist, wenn $k > 0$ ist. In diesem Fall nennt man k Polordnung von a der Funktion f. Aufgrund einiger bedeutender Sätze, ist es möglich, die Singularitäten einer Funktion f anhand des Abbildungsverhaltens von f in der Nähe einer solchen Singularität zu klassifizieren. Wir wollen diese Klassifizierung lediglich nennen:

Satz 1.4.1. *Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität hat. Dann ist die Singularität a*

1. *hebbar $\Leftrightarrow$ es gibt eine punktierte Umgebung von a, in der f beschränkt ist.*

2. *ein Pol $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$.*

3. *wesentlich $\Leftrightarrow$ in jeder noch so kleinen Umgebung von a kommt f jedem beliebigen Wert $b \in \mathbb{C}$ beliebig nahe.*

1.5 Laurententwicklung und Residuum

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass sich eine auf einem Ringgebiet analytische Funktion in eine Laurentreihe entwickeln lässt. Wir werden dabei die Ergebnisse aus den letzten Abschnitten und insbesondere die Cauchysche Integralformel verwenden. Damit ist der letzte Schritt zum Residuensatz gemacht. Als Quelle für diesen Abschnitt diente [Pri54], Kapitel 2.1.

Satz 1.5.1. *Es sei $f(z)$ eine auf dem Ringgebiet $\mathfrak{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid \ r < |z-a| < R\}$ definierte analytische Funktion.*

1. *Dann gibt es eine Darstellung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \text{ mit } c_n \in \mathbb{C}, z \in \mathfrak{R}.$$

2. *Diese Laurententwicklung ist eindeutig bestimmt, und zwar gilt*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad , n \in \mathbb{Z}, \ r < \rho < R,$$

wenn γ einen Kreis bezeichnet, dessen Radius wir mit ρ bezeichnen.

Beweis. 1. Wir betrachten ein Ringgebiet $\mathfrak{R}$, das von den Kreisen K und k mit Mittelpunkt a und Radien R, r mit $r < R$ begrenzt wird. Wir beschreiben nun um a zwei Kreise C und c mit Radien R' und r', so dass $r < r' < R' < R$. Wir bezeichnen das entstandene Ringgebiet, dessen Rand die Kreise C und c bilden, mit $\mathfrak{R}'$. Da $f(z)$ auf dem abgeschlossenen Ringgebiet $\bar{\mathfrak{R}}'$, analytisch ist, folgt nach der Cauchyschen Integralformel für $z \in \mathfrak{R}'$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{c^-} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

Für $z \in \mathfrak{R}'$ gilt $r' < |z-a| < R'$. Der Kürze halber setzen wir $|z-a| =: \rho$. Sowohl im ersten als auch im zweiten Integral taucht der Ausdruck $1/(\zeta - z)$ auf. Diesen formen wir für jedes Integral in geeigneter Weise um.

- Erstes Integral:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta - a})}.$$

  Wir richten nun unser Augenmerk auf den Quotienten $\frac{z-a}{\zeta-a}$. Es ist $\zeta \in C$ und somit $|\zeta - a| = R'$. Damit ist

$$\left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right| = \frac{|z-a|}{|\zeta - a|} = \frac{\rho}{R'} < 1.$$

Wir dürfen also schreiben

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n.$$

Die Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

ist in allen Punkten des Kreises C gleichmäßig konvergent.

- Zweites Integral:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-a-(\zeta-a)} = \frac{1}{(z-a)(1-\frac{\zeta-a}{z-a})}.$$

Es ist $\zeta \in c$ und somit $|\zeta - a| = r'$. Damit ist

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = \frac{|\zeta-a|}{|z-a|} = \frac{r'}{\rho} < 1.$$

Wir dürfen also schreiben

$$\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n.$$

Die Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

ist in allen Punkten des Kreises c gleichmäßig konvergent.

Einsetzen der Entwicklungen in unsere Ausgangsformel liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta$$

Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

konvergieren für $\zeta \in C$ beziehungssweise für $\zeta \in c$ gleichmäßig, und so können wir Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f(\zeta)(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\zeta.$$

Wir setzen

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \qquad \text{für } n=0,1,\dots\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta \qquad \text{für } n=1,2\dots.$$

Wir beschreiben um a als Mittelpunkt einen Kreis γ, der ganz in $\mathfrak{R}'$ liegt. Der Integrand $f(\zeta)/(\zeta-a)^{n+1}$ in c_n ist auf dem abgeschlossenen Gebiet $\bar{\mathfrak{R}}'$ analytisch und damit insbesondere auch in jedem Punkt von γ. Nach dem Cauchyschen Integralsatz für mehrfach zusammenhängende Gebiete gilt deshalb:

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta - \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = 0.$$

Damit ist

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.$$

Mit dem gleichen Argument zeigt man, dass

$$\int\limits_c f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta = \int\limits_\gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta.$$

Insgesamt haben wir

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{-n+1}} = c_{-n},$$

und damit die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n.$$

2. Wir nehmen an, dass in allen Punkten z des Kreisringes zwei verschiedene Entwicklungen bestehen:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} c'_n(z-a)^n$$

Multiplizieren wir beide Entwicklungen für ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $(z-a)^{-k-1}$, so erhalten wir

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-k-1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c'_n (z-a)^{n-k-1}$$

Integrieren wir nun $f(z)$ längs γ, so sieht man, dass alle Summanden, in denen die Exponenten von $(z-a)$ ungleich -1 sind, durch das Integieren verschwinden. Das Integral des Summanden, der $(z-a)^{-1}$ enthält, ist $2\pi i c_k = 2\pi i c'_k$. Da $z \in \mathbb{Z}$ gesetzt war, folgt für alle k, dass $c_k = c'_k$. □

Definition 1.5.1. Wir nennen den Koeffizienten c_{-1} der Laurententwicklung von $f(z)$ in a das *Residuum von $f(z)$ an der Stelle a* und schreiben dafür $res_a(f) := c_{-1}$.

Wir wollen nun eine Klassifizierung der Singularitäten von f hinsichtlich der Laurententwicklung von f in der Nähe der Singularitäten vornehmen. Es gilt der folgende Satz:

Satz 1.5.2. *Ist a eine Singularität von $f(z)$, so ist a*

1. *hebbar* $\Leftrightarrow$ $c_n = 0\ \forall n < 0$,

2. *ein Pol der Ordnung* $k \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $c_{-k} \neq 0$ und $c_n = 0\ \forall n < -k$,

3. *wesentlich* $\Leftrightarrow$ *die Laurententwicklung enthält unendliche viele negative Potenzen von $z-a$.*

Bemerkung 1.5.1. Wir hatten gesehen, dass der Koeffizient c_n der Laurententwicklung von $f(z)$ in a eindeutig bestimmt ist durch $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta d\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$. Damit ist $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta$ und somit $c_{-1} = 0$, falls a eine hebbare Singularität ist.

1.6 Die klassische Version des Residuensatzes

Wir können nun endlich die klassische Version des Residuensatzes angehen. Wir beziehen uns dabei auf $S.163/164$ in [Fre95] und $S.119$ff in [Pri54].

Satz 1.6.1. *(Klassischer Residuensatz) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $a_1, \ldots, a_k \in G$ paarweise verschiedene Punkte. Zudem sei $f : G \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und C eine* *stückweise glatte geschlossene Kurve, die die Punkte $a_1, \ldots, a_k$ umschließt und ganz in G liegt. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} res_{a_i} f(z).$$

Beweis. Wir beschreiben um jeden Punkt a_i als Mittelpunkt einen Kreis γ_i mit Radius r_i, so dass der Durchschnitt zweier verschiedener $U_{r_i}(a_i) \cup \gamma_i$ leer ist und γ_i ganz im Innern von C liegt. Die Funktion $f(z)$ ist in dem abgeschlossenen Gebiet, das von $K := C + \sum_{i=1}^{k} \gamma^-$ begrenzt wird, analytisch. Deswegen gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz für mehrfach zusammenhängende Gebiete

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_i} f(z)dz.$$

Wir sehen, dass der i'te Summand der rechten Seite gleich $res_{a_i}(f)$ ist, für alle $i = 1, \ldots, k$, womit die Behauptung folgt. □

Korollar 1.6.1. *Lässt sich f in die Punkte $a_1, \ldots, a_k$ hinein analytisch fortsetzen, so gilt:*

$$\sum_{i=1}^{k} res_{a_i}(f) = 0.$$

1.7 Anwendungen des Residuensatzes und Ausblick

Eine wichtige Anwendung des Residuensatzes ist die Berechnung bestimmter Integrale. Bisher haben wir bei der Untersuchung einer analytischen Funktion auf isolierte Singularitäten stets angenommen, dass diese im Endlichen liegen. Wir beschreiben nun um den Koordinatenursprung der komplexen Zahlenebene als Mittelpunkt einen Kreis mit Radius R, und nehmen an, dass die Funktion f außerhalb des Kreises keine singulären Punkte besitzt, wenn wir nur R hinreichend groß wählen. Wir sagen dann, dass der unendlich ferne Punkt ein isolierter singulärer Punkt der Funktion f ist. Wir nennen die Menge aller Punkte außerhalb des Kreises Umgebung des unendlich fernen Punktes. Wir nehmen nun an, dass f in der Umgebung des unendlich fernen Punktes analytisch ist. Setzen wir nun $f(z) = f(\frac{1}{z'})$, so ist die Funktion für $|z'| < \frac{1}{R}$ aber nicht im Nullpunkt definiert. Damit entspricht der Umgebung des unendlich fernen Punktes der z-Ebene eine Umgebung des Nullpunktes der z'-Ebene. Entspricht ein z einem z', so haben die Funktionen die gleichen Funktionswerte. Wir wollen sagen, der unendlich ferne Punkt ist eine wesentliche Singularität, ein Pol, eine hebbare Singularität von f, falls $f(\frac{1}{z'})$ eine wesentliche Singularität, ein Pol oder eine hebbare Singularität in 0 hat. Betrachten wir nun insbesondere rationale Funktionen

$$\frac{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m},$$

auf die wir im nächsten Kapitel unser Hauptaugenmerk richten, so sehen wir, dass diese in der erweiterten komplexen Zahlenebene keine Singularitäten bis auf Pole besitzt. Der unendlich ferne Punkt ist für $n \leq m$ ein Pol der Ordnung $n - m$. Wir werden im nächsten Kapitel die algebraische Version des Residuensatzes für rationale Funktionen kennen lernen und sehen, welcher Zusammenhang zwischen dem klassischen Residuensatz und seiner algebraischen Version besteht.

Kapitel 2

Der Residuensatz über $K(X)$

In diesem Kapitel werden wir die algebraische Version des Residuensatzes kennen lernen. Dabei beschränken wir uns auf rationale Funktionen aus dem Körper $K(X)$, wobei K ein beliebiger Körper ist. Wir haben schon im letzten Kapitel gesehen, dass rationale Funktionen keine wesentlichen Singularitäten besitzen. Unser Ziel ist es, den Punktresiduensatz über $K(X)$ zu beweisen. Da dies mit Hilfe logarithmischer Differentialformen geschieht, werden wir auch den Residuensatz für logarithmische Differentialformen kennen lernen.

2.1 Grundbegriffe

Da wir im folgenden Kapitel beliebige algebraische Funktionenkörper betrachten werden, lohnt es sich, schon in diesem Kapitel einige Grundbegriffe so allgemein wie möglich handzuhaben. Als Quelle dieses Abschnittes diente [Sti93] und [Hol99].

Definition 2.1.1. Es sei K ein Körper. Wir nennen einen Erweiterungskörper $F \supseteq K$ *algebraischen Funktionenkörper F/K in der Variablen x über K*, falls F eine endliche algebraische Erweiterung von $K(x)$ für ein über K transzendentes Element $x \in F$ ist.

Wir betrachten die Menge $\tilde{K} = \{\varphi \in F \mid \varphi \text{ ist algebraisch über } K\}$. Dann gilt:

- $\tilde{K}$ ist ein Unterkörper von F, und es ist $K \subseteq \tilde{K} \subseteq F$.
- $F/\tilde{K}$ ist ein algebraischer Funktionenkörper über $\tilde{K}$.

Definition 2.1.2. Wir nennen K *algebraisch abgeschlossen in F*, falls $\tilde{K} = K$ ist.

Beispiel 2.1.1.

1. Jeder rationale Funktionenkörper ist ein algebraischer Funktionenkörper. Dabei heißt ein algebraischer Funktionenkörper F/K *rational*, falls $F = K(x)$ für ein über K transzendentes $x \in F$ ist. Insbesondere sind damit auch $K(X)$ und $\mathbb{F}(X)$ algebraische Funktionenkörper.
2. Ist $\varphi(T) \in K(x)[T]$ ein irreduzibles Polynom und adjungieren wir zu $K(x)$ eine Nullstelle Y von $\varphi(T)$, so dass $\varphi(Y) = 0$ ist, so ist $F = K(x, Y)$ eine einfache algebraische Körpererweiterung von $K(x)$ und damit ein algebraischer Funktionenkörper.

Wir wollen anmerken, dass wir in diesem Kapitel nur den rationalen Funktionenkörper $K(X)$ betrachten werden. Alle Definitionen und Sätze, die wir für diesen rationalen Funktionenkörper angeben, gelten auch für beliebige rationale Funktionenkörper. Wir werden auf diese Tatsache im nächsten Kapitel zurückgreifen.

2.1.1 Stellen und Bewertungen

Definition 2.1.3. Es sei F/K ein algebraischer Funktionenkörper. Wir nennen einen Ring $\mathcal{O} \subseteq F$ *Stellen- oder Bewertungsring des Funktionenkörpers* F/K, falls gilt:

1. $K \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq F$
2. $\varphi \in \mathcal{O}$ oder $\varphi^{-1} \in \mathcal{O}$ für alle $\varphi \in F$.

Beispiel 2.1.2. Es sei $p(X) \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom und $0 \neq g(X) \in K[X]$. Dann sind die Ringe

$$\mathcal{O}_{p(X)} := \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid f(X), g(X) \in K[X], p(X) \nmid g(X) \right\} \text{ und}$$

$$\mathcal{O}_{\infty} := \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid f(X), g(X) \in K[X], \deg\ f(X) \leq \deg\ g(X) \right\}$$

Stellenringe von $K(X)$.

Satz 2.1.1. *Es sei $\mathcal{O}$ ein Stellenring von F/K. Dann hat $\mathcal{O}$ die folgenden Eigenschaften:*

1. *$\mathcal{O}$ ist ein kommutativer Ring*

2. *$\mathcal{O}$ besitzt genau ein Maximalideal $P := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$, wobei $\mathcal{O}^* := \{\varphi \in \mathcal{O};\ \varphi \in \mathcal{O} \text{ und } \varphi^{-1} \in \mathcal{O}\}$ die Einheitengruppe von $\mathcal{O}$ bezeichnet.*

3. *$\mathcal{O}$ ist ein Hauptidealring.*

4. *Ist $P = t \cdot \mathcal{O}$, so hat jedes Element $\varphi \in F/K$ eine eindeutige Zerlegung $\varphi = t^n \cdot u$, wobei $u \in \mathcal{O}^*$ und $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. 1. $\mathcal{O}$ ist ein Unterring des kommutativen Ringes F, also ist $\mathcal{O} \subsetneq F$ ein kommutativer Ring.

2. Wir zeigen zunächst, dass $P := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$ ein Ideal von $\mathcal{O}$ ist.

   - Es sei $\psi \in P$ und $\varphi \in \mathcal{O}$. $\psi \cdot \varphi \notin \mathcal{O}^*$ denn sonst wäre $\psi \in \mathcal{O}^*$ im Widerspruch zu $\psi \in P$. Also ist $\psi \cdot \varphi \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^* = P$.
   - Wir zeigen, dass für zwei beliebige Elemente $\psi, \psi' \in P$ auch $\psi' - \psi \in P$ ist. Mit $\psi, \psi' \in P$ ist entweder $\frac{\psi}{\psi'} \in \mathcal{O}$ oder $\frac{\psi'}{\psi} \in \mathcal{O}$. Sei o.B.d.A. $\frac{\psi}{\psi'} \in \mathcal{O}$. Dann ist auch $1 - \frac{\psi}{\psi'} \in \mathcal{O}$. Mit der ersten Idealeigenschaft ist dann auch $\psi'(1 - \frac{\psi}{\psi'}) = \psi' - \psi \in \mathcal{O}$ und somit ist P Ideal von $\mathcal{O}$.

   Wir zeigen nun, dass P Maximalideal ist.

   - Es reicht zu zeigen, dass für ein weiteres Ideal $I \subset \mathcal{O}$ mit $P \subset I \subset \mathcal{O}$ folgt, dass $I = \mathcal{O}$. I enthält mindestens ein Element aus $\mathcal{O}^*$. Soll I Ideal sein, so muss I aber auch alle anderen Einheiten von $\mathcal{O}^*$ enthalten. Damit ist aber $I = \mathcal{O}$, womit die Behauptung folgt.

Die Beweise von 3. und 4. können in [Sti93], $S.3 - 4$ nachgelesen werden. □

Bemerkung 2.1.1. Wir bestimmen nun die Einheitengruppe und das Maximalideal von $\mathcal{O}_{p(X)}$ und $\mathcal{O}_\infty$:

1. $\mathcal{O}^*_{p(X)} = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid\ f(X), g(X) \in K[X], p(X) \nmid g(X), p(X) \nmid f(X) \right\} \Rightarrow$ $P_{p(X)} = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid\ f(X), g(X) \in K[X], p(X) \nmid g(X), p(X) \mid f(X) \right\}$.

2. $\mathcal{O}^*_\infty = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid\ f(X), g(X) \in K[X], \deg\ f(X) = \deg\ g(X) \right\} \Rightarrow$ $P_\infty = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid\ f(X), g(X) \in K[X], \deg\ f(X) < \deg\ g(X) \right\}$.

Beweis. Erinnerung: Es liegen alle diejenigen Elemente $\varphi \in \mathcal{O}$ in $\mathcal{O}^*$, für die auch φ^{-1} in $\mathcal{O}$ liegt.

1. Es sei $\frac{f(X)}{g(X)} \in \mathcal{O}_{p(X)}$. Für den Fall, dass $p(X) \mid f(X)$, folgt $\frac{g(X)}{f(X)} \notin \mathcal{O}_{p(X)}$. Gilt aber $p(X) \nmid f(X)$, so ist $\frac{g(X)}{f(X)} \in \mathcal{O}_{p(X)}$. Daraus folgt die Behauptung. $P_{p(X)}$ ist klar.

2. Es sei nun $\frac{f(X)}{g(X)} \in \mathcal{O}_\infty$. Für den Fall, dass $\deg\ f(X) < \deg\ g(X)$, ist $\frac{g(X)}{f(X)} \notin \mathcal{O}_\infty$. Ist jedoch $\deg\ f(X) = \deg\ g(X)$, so ist $\frac{g(X)}{f(X)} \in \mathcal{O}_\infty$, womit die Behauptung folgt. P_∞ ist klar. □

Definition 2.1.4. Ist $\mathcal{O}$ ein Stellenring von F/K, so heißt dessen Maximalideal P *Stelle von* F/K. Ist $P = t \cdot \mathcal{O}$, so nennen wir t lokalen Parameter in P. Die Menge aller Stellen von F/K bezeichnen wir mit

$$\mathbb{P}_F := \{P \mid P \text{ ist eine Stelle von } F/K\}.$$

Bemerkung 2.1.2.

1. $t = p(X)$ ist ein lokaler Parameter in $P_{p(X)}$. Es ist aber auch $p(X) \cdot u = t'$ ein lokaler Parameter in $P_{p(X)}$, falls $u \in \mathcal{O}^*_{p(X)}$.

2. Für P_∞ ist $t = \frac{1}{X}$ ein lokaler Parameter, denn ist $\varphi = \frac{f(X)}{g(X)} \in P_\infty$, das heißt, ist $\deg\ f(X) < \deg\ g(X)$, so können wir $\frac{1}{X}$ von φ abspalten und erhalten $\varphi = \frac{1}{X} \cdot \frac{X\ f(X)}{g(X)} = \frac{\tilde{f(X)}}{g(X)}$ mit $\frac{\tilde{f(X)}}{g(X)} \in \mathcal{O}_\infty$. Auch hier ist $\frac{1}{X} \cdot u = t'$ ein weiterer lokaler Parameter in P_∞, falls $u \in \mathcal{O}^*_\infty$.

Definition 2.1.5. Eine Abblidung $v : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ heißt *diskrete Bewertung von F/K*, falls für $\varphi, \psi \in F$ gilt:

1. $v(\varphi) = \infty \ \Leftrightarrow\ \varphi = 0$,
2. $v(\varphi \cdot \psi) = v(\varphi) + v(\psi)$,
3. $v(\varphi + \psi) \geq min\,\{v(\varphi), v(\psi)\}$ (Dreiecks-Ungleichung),
4. es gibt ein $z \in F$, so dass $v(z) = 1$.
5. $v(c) = 0$ für jedes $0 \neq c \in K$.

Lemma 2.1.1. *Ist v eine diskrete Bewertung von F/K und sind $\varphi, \psi \in F$ zwei Funktionen mit $v(\varphi) \neq v(\psi)$, so gilt:*

$$v(\varphi + \psi) = min\,\{v(\varphi), v(\psi)\}.$$

BEWEIS. Es ist $v(-\psi) = v(-1) + v(\psi) = v(\psi)$. Es sei o.B.d.A. $v(\varphi) < v(\psi)$. Gilt $v(\varphi + \psi) = min\,\{v(\varphi), v(\psi)\}$ nicht, so muss nach der Dreiecks-Ungleichung $v(\varphi+\psi) > min\,\{v(\varphi), v(\psi)\}$ gelten, also $v(\varphi+\psi) > v(\varphi)$. Nun ist aber $v(\varphi) = v((\varphi + \psi) - \psi) \geq min\,\{v(\varphi + \psi), v(-\psi) = v(\psi)\} > v(\varphi)$. Das ist ein Widerspruch, womit die Behauptung folgt. □

Definition 2.1.6. Es sei $\mathcal{O} =: \mathcal{O}_P$ ein Stellenring von F/K mit Maximalideal P. Wir definieren für $P \in \mathbb{P}_F$ eine Abbildung $v_P : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, die eine diskrete Bewertung von F/K ist. Dazu wählen wir einen lokalen Parameter t von P. Wir wissen, dass jedes $0 \neq \varphi \in F$ eine eindeutige Zerlegung $\varphi = t^n \cdot u$ mit $u \in \mathcal{O}_P^*,\ n \in \mathbb{Z}$ hat. Wir definieren dann

$$v_P(\varphi) := n,\ v_P(0) = \infty.$$

Die Definition ist unabhängig von der Wahl des lokalen Parameters. Denn ist t' eine anderer lokaler Parameter von P, dann ist $P = t \cdot \mathcal{O}_P = t' \cdot \mathcal{O}_P$ und somit $t = t' \cdot w$ mit $w \in \mathcal{O}_P^*$. Daraus folgt für die Zerlegung von $\varphi \in F$, dass $\varphi = t^n \cdot u = t'^n w^n \cdot u = t'^n(w^n \cdot u)$ mit $w^n \cdot u \in \mathcal{O}_P^*$, womit die Behauptung folgt.

Lemma 2.1.2. *Es sei F/K ein beliebiger Funktionenkörper.*

1. *Für eine beliebige Stelle $P \in \mathbb{P}_F$ ist die Abbildung v_P eine diskrete Bewertung von F/K und es ist*

$$\mathcal{O}_P = \{\varphi \in F/K \mid\ v_P(\varphi) \geq 0\},$$

$$\mathcal{O}_{P^*} = \{\varphi \in F/K \mid v_P(\varphi) = 0\},$$

$$P = \{\varphi \in F/K \mid v_P(\varphi) > 0\}.$$

   Eine Funktion $\varphi \in F$ ist ein lokaler Parameter in $P \Leftrightarrow v_P(\varphi) = 1$.

2. *Ist nun andersrum v eine beliebige diskrete Bewertung von F/K, so ist $P := \{\varphi \in F/K \mid v_P(\varphi) > 0\}$ eine Stelle von F/K und $\mathcal{O}_P = \{\varphi \in F/K \mid\ v_P(\varphi) \geq 0\}$ der zugehörige Stellenring.*

BEWEIS. Wir beschränken den Beweis auf die Dreiecks-Ungleichung. Es sei $\varphi, \psi \in F$ mit $v_P(\varphi) = n$ und $v_P(\psi) = m$. Es sei o.B.d.A. $n \leq m$. Dann haben wir für $\varphi = t^n u$ und $\psi = t^m u'$ mit $u, u' \in \mathcal{O}_P^*$ die Summe $\varphi + \psi = t^n u + t^m u' = t^n(u + t^{m-n}u') = t^n \gamma$ mit $\gamma \in \mathcal{O}_P$. Ist nun $\gamma = 0$, so ist $v_P(\varphi + \psi) = \infty > min\,\{n, m\}$. Ist $\gamma \neq 0$, so gibt es eine Zerlegung $\gamma = t^k u''$ mit $k \geq 0$ und $u'' \in \mathcal{O}_P^*$. Dann haben wir $v_P(\varphi + \psi) = v_P(t^{n+k}u'') = n + k \geq n = min\,\{v_P(\varphi), v_P(\psi)\}$. □

Bemerkung 2.1.3. 1. Wir betrachten das Maximalideal $P_{p(X)}$ von $\mathcal{O}_{p(X)}$ und wählen $t = p(X)$ als lokalen Parameter. Für ein beliebiges

$$0 \neq \varphi = p(X)^k \frac{f(X)}{g(X)},\ \frac{f(X)}{g(X)} \in \mathcal{O}^*_{p(X)},\ k \in \mathbb{Z}$$

setzen wir

$$v_{P_{p(X)}}(\varphi) := k,\ v_{P_{p(X)}}(0) := \infty.$$

$v_{P_{p(X)}}$ ist eine diskrete Bewertung.

2. Wir betrachten nun das Maximalideal P_∞ von $\mathcal{O}_\infty$ und wählen $t = \frac{1}{X}$ als lokalen Parameter. Es sei $0 \neq \varphi = \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{a_0+a_1X+...+a_nX^n}{b_0+b_1X+...+b_mX^m}$. Spalten wir im Zähler X^n und im Nenner X^m ab, so erhalten wir $\varphi = \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{X^n(a_0X^{-n}+a_1X^{-n+1}+...+a_n)}{X^m(b_0X^{-m}+b_1X^{-m+1}+...+b_m)} = \frac{1}{X^{\deg\ g(X)-\deg\ f(X)}}\frac{(a_0X^{-n}+...+a_n)}{(b_0X^{-m}+...+b_m)}$, wobei die Summen in Zähler und Nenner nicht weiter durch $\frac{1}{X}$ teilbar sind. Damit ist

$$v_{P_\infty}(\varphi) := \deg\ g(X) - \deg\ f(X),\ v_{P_\infty}(0) := \infty$$

eine diskrete Bewertung.

Definition 2.1.7. Es sei $\varphi \in F$ und $P \in \mathbb{P}_F$ eine Stelle. Wir sagen, dass P eine *Nullstelle von* φ ist, falls $v_P(\varphi) > 0$. Ist $v_P(\varphi) = m > 0$, so ist P eine *Nullstelle von* φ *der Ordnung* m. Wir bezeichnen die Menge aller Nullstellen von φ mit

$$N_\varphi := \{P \in \mathbb{P}_F \mid v_P(\varphi) > 0\}.$$

P heißt *Pol von* φ, falls $v_P(\varphi) < 0$. Ist $v_P(\varphi) = m < 0$, so ist P ein *Pol von* φ *der Ordnung* $|m|$. Wir bezeichnen die Menge aller Pole von φ mit

$$P_\varphi := \{P \in \mathbb{P}_F \mid v_P(\varphi) < 0\}.$$

Wir wollen nun die Frage klären, ob ein beliebiger Funktionenkörper F/K überhaupt Stellen besitzt und wie viele.

Lemma 2.1.3. *1. Es sei F/K ein algebraischer Funktionenkörper. Dann besitzt F/K unendlich viele Stellen.*

2. Es sei $K(X)/K$ ein rationaler Funktionenkörper. Dann besitzt $K(X)$ die Sellen $P_{p(X)}$ und P_∞ und nur diese.

Ein Beweis für dieses Lemma kann in [Sti93], $S.10 - 13$ nachgelesen werden. Wir wollen im Folgenden nur noch Funktionenkörper F/K betrachten, für die K algebraisch abgeschlossen in F gilt, und werden dies in Zukunft stillschweigend voraussetzen.

Definition 2.1.8. Es sei $P \in \mathbb{P}_F$ eine Stelle von F/K und $\mathcal{O}_P$ der zugehörige Stellenring.

1. Wir definieren mit $F_P := \mathcal{O}_P/P$ den *Restklassenkörper von* P. Die Abbildung

$$\kappa_P : \begin{cases} F \to & F_P \cup \{\infty\} \\ \varphi \mapsto & \varphi(P) \end{cases}$$

nennen wir *Restklassenabbildung von* P.

2. $\deg P := [F_P : K]$ nennen wir *Grad von* P.

Man kann zeigen, dass der Grad einer Stelle P immer endlich ist (siehe dazu auch [Sti93], S.6). Ist insbesondere $\deg P = 1$, so ist $F_P = K$ und somit $F \ni \varphi \mapsto \varphi(P) \in K \cup \{\infty\}$.
Wir wollen nun einige wichtige Informationen über den rationalen Funktionenkörper $K(X)/K$ zusammentragen:

Bemerkung 2.1.4. 1. Wir betrachten eine Stelle $P_{p(X)} \in \mathbb{P}_{K(X)}$, und es sei $p(X) \in K[X]$ ein irreduzibeles Polynom. Der Restklassenkörper $\mathcal{O}_{P_{p(X)}}/P_{p(X)}$ ist isomorph zu $K[X]/(p(X))$. Ein Isomorphismus ist gegeben durch die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} K[X]/(p(X)) \to & \mathcal{O}_P/P \\ f(X) \bmod p(X) \mapsto & f(X)(P) \end{cases}$$

Damit ist $\deg P = \deg p(X)$.

2. Ist $p(X) \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom der Gestalt $p(X) = X - a$ mit $a \in K$, so ist $\deg P_{p(X)} = 1$. Die Restklassenabbildung ist dann in folgender Weise gegeben:

   - Ist $\varphi(X) = \frac{f(X)}{g(X)} \in \mathcal{O}_{p(X)}$ (gekürzt), so ist $\varphi(P_{p(X)}) = \varphi(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$.
   - Ist $\varphi(X) = \frac{f(X)}{g(X)} \notin \mathcal{O}_{p(X)}$ (gekürzt), so ist $g(X) \mod P_{p(X)} = 0$ und wir setzen $\varphi(P_{p(X)}) = \infty$.

   Insgesamt erhalten wir

$$\kappa_{P_{p(X)}}(\varphi) = \varphi(P_{p(X)}) = \begin{cases} \varphi(a) & \text{falls } \varphi \in \mathcal{O}_{p(X)} \\ \infty & \text{falls } \varphi \notin \mathcal{O}_{p(X)} \end{cases}$$

3. Es sei $P = P_\infty$. Dann ist $\deg P_\infty = 1$. Ist φ von der Form

$$\varphi = \frac{a_n X^n + \ldots + a_0}{b_m X^m + \ldots + b_0}$$

(gekürzt), so ist die Restklassenabbildung gegeben durch

$$\varphi(P_\infty) = \begin{cases} a_n/b_n & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n < m \\ \infty & \text{falls } n > m \end{cases}.$$

4. K ist algebraisch abgeschlossen in $K(X)$.

Den Beweis zu dieser Bemerkung findet man auf Seite 10 in [Sti93].

2.1.2 Divisoren und Funktionenräume

Mit Hilfe von Divisoren können wir Funktionenräume mit vorgeschriebener Beschränkung von Polstellen und Polordnungen definieren. Wir werden insbesondere den Funktionenraum $\mathfrak{L}(D)$ kennen lernen. Diesen benötigen wir für den Satz von Riemann-Roch, der wiederum seine Anwendung beim Beweis des Punktresiduensatzes findet. Zudem können wir mit seiner Hilfe den Rational-geometrischen Goppa-Code definieren. Diesen betrachten wir, wenn wir die Anwendung des Punktresiduensatzes in der Codierungstheorie thematisieren.

Divisoren

Definition 2.1.9. Es sei P eine Stelle von F/K. Dann heißt ein Element D der Menge

$$Div(F) := \left\{ \sum_{P \in \mathbb{P}(F)} m_P P \text{ mit } m_P \in \mathbb{Z}, m_P = 0 \text{ für fast alle } P \in \mathbb{P}_F \right\}$$

Divisor von F/K. Wir nennen $supp(D) := \{P \in \mathbb{P}_F \mid m_P \neq 0\}$ *Träger von* D. Wir können zwei Divisoren addieren, indem wir

$$D + D' := \sum_{P \in \mathbb{P}_F} (m_P + m'_P) P$$

setzen. Das neutrale Element bezüglich dieser Addition nennen wir *Nulldivisor*, gegeben durch $0 := \sum_{P \in \mathbb{P}_F} m_P P,\ m_P = 0\ \forall P \in \mathbb{P}_F$. Damit ist $Div(F)$ eine von den Stellen $P \in \mathbb{P}_F$ erzeugte freie abelsche Gruppe. Wir nennen

$Div(F)$ die *Divisorgruppe von F/K.*
Mit

$$D \geq 0 \Leftrightarrow_{Def} m_P \geq 0 \ \forall P \in \mathbb{P}_F$$

und demzufolge

$$D \geq D' \Leftrightarrow D - D' \geq 0$$

haben wir eine Halbordnung definiert.

Definition 2.1.10. Es sei $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} m_P P$ ein Divisor und $Q \in \mathbb{P}_F$ eine Stelle von F/K. Dann definieren wir $v_Q(D) := m_Q$.

Bemerkung 2.1.5. Damit haben wir $supp(D) = \{P \in \mathbb{P}_F \mid v_P(D) \neq 0\}$, sowie $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(D)P$ und schließlich $D \geq 0 \Leftrightarrow v_P(D) \geq 0 \ \forall P \in \mathbb{P}_F$.

Wir wissen, dass jede rationale Funktion $\varphi \neq 0$ nur endlich viele Null- und Polstellen besitzt. Man kann zeigen, dass dies auch für eine beliebige Funktion $0 \neq \varphi \in F$ aus einem beliebigen Funktionenkörper F/K gilt. Damit ist folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.1.11. Es sei $0 \neq \varphi \in F$. Dann heißt

1. $(\varphi)_0 := \sum_{P \in N_\varphi} v_P(\varphi)P$ *Nulldivisor von φ,*
2. $(\varphi)_\infty := \sum_{P \in P_\varphi} v_P(\varphi)P$ *Poldivisor von φ,*
3. und $(\varphi) := (\varphi)_0 - (\varphi)_\infty$ *Hauptdivisor von φ.*

Bemerkung 2.1.6. Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe von $Div(F)$, die wir als *Hauptdivisorgruppe* $Princ(F) := \{(\varphi) \mid 0 \neq \varphi \in F\}$ bezeichnen:

$$(\varphi) + (\psi) = \sum v_P(\varphi)P + \sum v_P(\psi)P = \sum (v_P(\varphi) + v_P(\psi))P = (\varphi \cdot \psi),$$

$$(\varphi) - (\psi) = \sum v_P(\varphi)P - \sum v_P(\psi)P = \sum (v_P(\varphi) - v_P(\psi))P = (\frac{\varphi}{\psi}).$$

Der Funktionenraum $\mathfrak{L}(D)$

Mit Hilfe von Divisoren können wir nun Funktionenräume mit vorgegebener Beschränkung von Polstellen definieren. Wir wollen die Definition auf rationale Funktionkörper beschränken (denn nur für diese benötigen wir eine Definition). Aus diesem Grund gelte in diesem Abschnitt $F = K(X)$.

Definition 2.1.12. Es sei $D \in Div(F)$ ein Divisior von F. Dann setzen wir

$$\mathfrak{L}(D) := \{\varphi \in F \mid (\varphi) \geq -D\} \cup \{0\}.$$

Wir können den Divisor D in der Form $D = \sum_{i=1}^{r} m_i P_i - \sum_{j=r+1}^{s} m_j P_j$, $m_{i,j} \in \mathbb{N}, P_i \neq P_j$ für $i \neq j$, schreiben . $\varphi \in \mathfrak{L}(D)$ hat folgende Eigenschaften:

- Falls φ Pole hat, so hat φ höchstens Pole in den Stellen $P_1, \ldots, P_r$ der Ordnung $\leq m_i,\ i = 1, \ldots, r$.
- φ hat in den $P_{r+1}, \ldots, P_s$ Nullstellen der Ordnung $\geq m_j,\ j = r + 1, \ldots, s$.

Lemma 2.1.4. $\mathfrak{L}(D)$ *ist ein* K*-Vektorraum.*

Beweis. Es seien $\varphi, \psi \in \mathfrak{L}(D)$ und $a \in K$.

- Für eine beliebige Stelle $P \in \mathbb{P}_F$ ist $v_P(\varphi+\psi) \geq min\,\{v_P(\varphi), v_P(\psi)\} \geq -v_P(D)$.
- $v_P(a\varphi) = v_P(a) + v_P(\varphi) = v_P(\varphi) \geq -v_P(D)$, denn für $a \in K$ ist $v_P(a) = 0\ \forall P \in \mathbb{P}_F$ und damit $(a) = 0$. □

Definition 2.1.13. Wir bezeichnen mit $l(D) := dim_K \mathfrak{L}(D)$ die Dimension des K-Vektorraumes $\mathfrak{L}(D)$.

Beispiel 2.1.3. Wir betrachten den rationalen Funktionenkörper $\mathbb{F}(X)$. Es sei $r \in \mathbb{N}_+$.

$$L_r := L((r-1)P_\infty) = \{\varphi \in \mathbb{F}(X) \mid (\varphi) \geq -(r-1)\} \cup \{0\}\,.$$

In L_r liegen also alle die Funktionen φ, für die $v_{P_\infty}(\varphi) \geq -r+1$ und $v_P(\varphi) \geq 0\ \forall P_\infty \neq P \in \mathbb{P}(\mathbb{F}(X))$. Es sei $0 \neq \varphi = \frac{f(X)}{g(X)} \in L_r$ gekürzt. $g(X)$ ist konstant, sonst hätte $g(X)$ mindestens einen Primteiler $p(X)$ und es gäbe damit eine Stelle $P \neq P_\infty$ mit $v_P(\frac{f(X)}{g(X)}) < 0$. Nach Definition von L_r hat aber keine Funktion einen Pol im Endlichen, womit die Behauptung folgt. Da $v_{P_\infty}(\varphi) \geq -r+1$ also $v_{P_\infty}(\varphi) > -r$ für $\varphi \in L_r$, ist $-\deg\ f(X) + \deg\ g(X)(=0) > -r$. Damit liegen in L_r alle Polynome vom Grad $< r$.

2.1.3 Algebraische Differentialformen

Bevor wir uns mit algebraischen Differentialformen beschäftigen, müssen wir noch einige Begriffe klären.

Definition 2.1.14. Es sei K ein Körper und F/K eine Körpererweiterung. Zudem sei M ein F-Vektorraum. Wir nennen eine Abbildung $\delta : F \to M$ *Derivation von* F/K, falls δ folgende Eigenschaften erfüllt:

- δ ist K-linear.
- Es gilt die Produktregel: $\delta(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot \delta(\psi) + \psi \cdot \delta(\varphi)$ für $\varphi, \psi \in F$.

Gilt $M = F$, so nennen wir δ *Ableitung von F/K*.

Definition 2.1.15. (Definition und Satz) Wir betrachten ein Polynom $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$. Wir definieren eine Abbildung $\delta_X : K[X] \to K[X]$ durch

$$\delta_X(f) := f'(X) \ \mapsto \ \sum_{k=0}^{n} k \cdot a_k X^{k-1}.$$

Diese Abbildung ist K-linear, denn es gilt:

- $(f(X) + g(X))' = f'(X) + g'(X)$ mit $f(X), g(X) \in K[X]$,
- $(c \cdot f(X))' = c \cdot f'(X)$.

Außerdem gilt die Produktregel:

$$(f(X) \cdot g(X))' = f'(X) \cdot g(X) + f(X) \cdot g'(X).$$

Damit können wir δ_X zurecht Ableitung nennen. Wir können diese Abbildung zu einem $K-$Vektorraum Endomorphismus auf $K(X)$ fortsetzen, indem wir definieren $(\frac{f(X)}{g(X)})' := \frac{f'(X)g(X)-f(X)g'(X)}{g^2(X)}$ für $f(X), g(X) \in K[X]$. Die Produktregel setzt sich ebenfalls fort zu $(fg)' = f'g + fg'$ für f und g aus $K(X)$.

Definition 2.1.16. Mit dem Symbol dX heißt

$$\Omega_{K(X)} = K(X) \cdot dX = \{\varphi \cdot dX \mid \varphi \in K(X)\}$$

Raum der Differentialformen von $K(X)$. Die Abbildung

$$d : K(X) \to \Omega_{K(X)}, \ \varphi \mapsto d\varphi := \varphi' \cdot dX$$

heißt *Differential-Abbildung von $K(X)$*.

Bemerkung 2.1.7. $\Omega_{K(X)}$ ist ein 1-dimensionaler $K(X)$-Vektorraum.
Die Differential-Abbildung hat folgende Eigenschaften:

1. $d(\varphi + \psi) = d\varphi + d\psi$,
2. $d(c \cdot \varphi) = c \cdot d\varphi$, für $c \in K$,
3. $d(\varphi \cdot \psi) = \varphi d\psi + \psi d\varphi$,

4. $d\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -\frac{1}{\varphi^2}d\varphi$,

5. $d\left(\frac{\psi}{\varphi}\right) = \frac{\varphi d\psi - \psi d\varphi}{\varphi^2}$.

Beweis.
1. $d(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)'dX = (\varphi' + \psi')dX = \varphi' dX + \psi' dX = d\varphi + d\psi$.

2. $d(c \cdot \varphi) = (c \cdot \varphi)'dX = c \cdot \varphi' dX = c \cdot d\varphi$.

3. $d(\varphi \cdot \psi) = (\varphi\psi)'dX = (\varphi'\psi + \varphi\psi')dX = \varphi'\psi dX + \varphi\psi' dX = \psi\varphi' dX + \varphi\psi' dX = \psi d\varphi + \varphi d\psi$.

4. $d(1) = 1'dX = 0$.
   $\Rightarrow\ 0 = d(1) = d(\varphi \cdot \frac{1}{\varphi}) = \frac{1}{\varphi} \cdot d\varphi + \varphi d\frac{1}{\varphi}$
   $\Rightarrow\ d\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -\frac{1}{\varphi^2}d\varphi$.

5. $d\left(\frac{\psi}{\varphi}\right) = \psi d\left(\frac{1}{\varphi}\right) + \frac{1}{\varphi}d\psi = \psi(-\frac{1}{\varphi^2}d\varphi) + \frac{1}{\varphi}d\psi = \frac{\varphi d\psi - \psi d\varphi}{\varphi^2}$.

Lemma 2.1.5. *Für jede Funktion $\varphi \in K(X)$, für die $d\varphi \neq 0$ erfüllt ist, ist $d\varphi$ eine Basis von $\Omega_{K(X)}$, also $\Omega_{K(X)} = K(X) \cdot d\varphi$. Mit anderen Worten: Ist $\varphi \in K(X)/ker(d)$, so lässt sich jede Differentialform $\omega = u \cdot dX$, $u \in K(X)$ in der Form $\omega = v \cdot d\varphi$, $v \in K(X)$ darstellen. v ist eindeutig bestimmt.*

Eine Beweisidee zu diesem Lemma findet man in der Vorlesung [Hol03]. Ist insbesondere $P \in \mathbb{P}_{K(X)}$ eine Stelle vom Grad 1 (diese betrachten wir in Zukunft) und t ein lokaler Parameter in P, so ist $dt \neq 0$ und wir können jedes $\omega \in \Omega_{K(X)}$ in der Form $u \cdot dt$ schreiben.

Definition 2.1.17. Es seien $\omega = f_1 \cdot d\varphi$, $\eta = g_1 \cdot d\varphi \neq 0$ zwei Differentialformen. Wir definieren den *Quotienten der Differentialformen* durch

$$\frac{\omega}{\eta} = \frac{f_1 \cdot d\varphi}{g_1 \cdot d\varphi} := \frac{f_1}{g_1}.$$

Die Definition ist unabhängig von der Wahl von φ, denn sind $\omega = f_2 \cdot d\psi$, $\eta = g_2 \cdot d\psi \neq 0$ ebenfalls Darstellungen von ω und η, so ist $\omega = f_1 \cdot d\varphi = f_2 \cdot d\psi \ \Leftrightarrow\ f_1\varphi' dX = f_2\psi' dX \ \Leftrightarrow\ f_1\varphi' = f_2\psi'$, und analog $\eta = g_1 d\varphi = g_2 d\psi \ \Leftrightarrow\ g_1\varphi' = g_2\psi'$ und somit,

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_2\psi'}{\varphi'} \cdot \frac{\varphi'}{g_2\psi'} = \frac{f_2}{g_2}.$$

Es seien $\omega_1 = df, \omega_2 = dg, \omega_3 = dt$ Differentialformen aus $\Omega_{K(X)}$. Dann gilt

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} \quad \text{,also}$$

$$\frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt} = \frac{df}{dt},$$

und damit die Kettenregel. □

Nach Definition der Differential-Abbildung ist $d\varphi = \delta_X(\varphi) \cdot dX$. Mit der letzten Definition gilt damit $\frac{d\varphi}{dX} = \delta_X(\varphi)$.

Bewertung einer algebraischen Differentialform

Es sei $P \in P_{K(X)}$ eine Stelle. Wir wollen die Bewertung einer Differentialform definieren. Dazu setzen wir

$$v_P(dX) := \begin{cases} 0, & \text{falls } P \neq P_\infty \\ -2, & \text{falls } P = P_\infty \end{cases} .$$

Es ein nun $\omega = \varphi \cdot dX$ eine Differentialform. Dann haben wir durch

$$v_P(\omega) := v_P(\varphi) + v_P(dX)$$

die *Bewertung einer Differentialform* definiert. Wir wollen aus dieser Definition einige „Rechenregeln“ ableiten.

Lemma 2.1.6. *Es sei $P \in P_{K(X)}$ eine Stelle und t ein lokaler Parameter in P. Dann gilt:*

1. $P \neq P_\infty \;\Rightarrow\; v_P(\omega) = v_P(\varphi)$,
2. $v_{P_\infty}(\omega) = v_{P_\infty}(\varphi) - 2$.
3. $v_P(f \cdot \omega) = v_P(f) + v_P(\omega)$.
4. $v_P(dt) = 0$ *und* $v_P(f \cdot dt) = v_P(f)$.

1. und 2. sind klar. Die Beweise für 3. und 4. kann man in [Hol99], $S.34 - 36$ nachlesen.

Definition 2.1.18. Wir nennen eine Differentialform $\omega \in \Omega_{K(X)}$ *regulär in der Stelle P*, falls $v_P(\omega) \geq 0$ ist. P heißt *Nullstelle der Ordnung $v_P(\omega)$*, falls $v_P(\omega) > 0$. Ist $v_P(\omega) < 0$, so heißt P *Polstelle von ω der Ordnung $-v_P(\omega)$*.

Kanonische Divisoren

Mit Hilfe kanonischer Divisoren ist es möglich, für einen beliebigen Divisor D den Raum der Differentialformen des Diviors D einzuführen. Wir benötigen diesen Raum sowohl für den Beweis des Punktresiduensatzes, als auch für die Definition des Goppa-Residuen-Codes. Letzteren betrachten wir, wenn wir uns mit der Anwendung des Punktresiduensatzes in der Codierungstheorie beschäftigen.

Definition 2.1.19. Es sei $0 \neq \omega \in \Omega_{K(X)}$ eine Differentialform. Wir nennen

$$(\omega) := \sum_{P \in \mathbb{P}_{K(X)}} v_P(\omega) \cdot P$$

kanonischen Divisor von ω.

Wir müssen zeigen, dass (ω) tatsächlich ein Divisor ist. Wir müssen also zeigen, dass $v_P(\omega) = 0$ ist für fast alle $P \in \mathbb{P}_{K(X)}$. Für ein beliebiges $0 \neq \omega = g \cdot dX \in \Omega_{K(X)}$ gilt die Gleichung $v_P(\omega) = v_P(g) + v_P(dX)$. Wir wissen, dass $v_P(dX) \neq 0 \Leftrightarrow P = P_\infty$. Außerdem ist $v_P(g) = 0$ für fast alle $P \in \mathbb{P}_{K(X)}$. Damit folgt die Behautung.

Bemerkung 2.1.8. Ist $0 \neq \omega \in \Omega_{K(X)}$ eine Differentialform und $f \in K(X)^*$ eine Funktion, so ist

$$\begin{aligned}
(f \cdot \omega) &= \sum_{P \in \mathbb{P}_{K(X)}} v_P(f \cdot \omega) \cdot P \\
&= \sum_{P \in \mathbb{P}_{K(X)}} (v_P(f) + v_P(\omega)) \cdot P \\
&= \sum_{P \in \mathbb{P}_{K(X)}} v_P(f) \cdot P + \sum_{P \in \mathbb{P}_{K(X)}} v_P(\omega) \cdot P \\
&= (f) + (\omega).
\end{aligned}$$

Definition 2.1.20. Es sei $D \in Div(K(X))$ ein Divisor.Wir definieren den *Raum der Differentialformen des (Polbeschränkungs-) Divisors D* durch

$$\Omega(D) := \left\{ 0 \neq \omega \in \Omega_{K(X)} \mid (\omega) \geq D \right\}.$$

$\Omega(D)$ ist ein K-Vektorraum.

2.1.4 Laurententwicklung und Residuum

Wir betrachten den rationalen Funktionenkörper $K(X)$. Es sei $P \in \mathbb{P}_{K(X)}$ eine Stelle vom Grad 1 und t ein lokaler Parameter in P. Wir wollen zeigen, dass jede rationale Funktion in Bezug auf t eine eindeutige Laurententwicklung besitzt.

Satz 2.1.2. *Es sei $\varphi \in K(X)$ und $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ vorgegebene Zahlen, für die $m \leq v_P(\varphi) < n$ erfüllt ist. Dann gibt es eine Darstellung*

$$\varphi = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + f_n$$

mit Koeffizienten $a_i \in K$ und $t^n \mid f_n$ in $\mathcal{O}_P$.

Beweis. *Existenz:*

- Wir zeigen die Existenz zunächst für alle Funktionen $\varphi \in \mathcal{O}_P$.
  Wir erinnern uns zunächst an die Restklassenabbildung

  $$\kappa_P : \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_P/P,\ \varphi \mapsto \varphi \ mod\ P =: \varphi(P).$$

  Da P nach Voraussetzung den Grad 1 hat, ist $\mathcal{O}_P/P = K$, also $\varphi(P) \in K$ für alle $\varphi \in \mathcal{O}_P$.
  Erster Schritt: Für $\varphi \in \mathcal{O}_P$ ist $\kappa_P(\varphi - \varphi(P)) = 0$. Damit ist $\varphi - \varphi(P) \in ker(\kappa_P)$ und somit $\varphi - \varphi(P) \in P$. Wir setzen $a_0 := \varphi(P)$ und $\varphi_1 := \varphi - a_0$ und erhalten

  $$\varphi = a_0 + \varphi_1.$$

  Außerdem gilt $t \mid \varphi_1 = \varphi - \varphi(P)$, da $\varphi_1 \in P = t \cdot \mathcal{O}_P$.
  Zweiter Schritt: Aus $t \mid \varphi_1$ folgt $\varphi_1/t \in \mathcal{O}_P$. Somit ist $\kappa_P(\varphi_1/t - (\varphi_1/t)(P)) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi_1/t - \varphi_1/t(P) \in P$. Wir setzen $a_1 := (\varphi_1/t)(P)$ und $g_1 := \varphi_1/t - a_1$ und erhalten $\varphi_1/t = a_1 + g_1 \ \Leftrightarrow\ (\varphi - a_0)/t = a_1 + g_1 \ \Leftrightarrow\ \varphi = a_0 + a_1 t + g_1 t$. Außerdem gilt $t \mid g_1$, da $g_1 = \varphi_1/t - (\varphi_1/t)(P) \in t \cdot \mathcal{O}_P$, und mit $f_2 := g_1 \cdot t$ haben wir $t^2 \mid f_2$. Damit haben wir

  $$\varphi = a_0 + a_1 t + f_2 t^2.$$

  So verfahren wir weiter bis wir nach weiteren $n-2$ Schritten die gewünschte Darstellung erhalten.

- Ist $\varphi \notin \mathcal{O}_P$ mit $v_P(\varphi) = m < 0$, so ist $v_P(t^{-m} \cdot \varphi) = -m + m = 0$. Also ist $t^{-m} \cdot \varphi \in \mathcal{O}_P$ und wir haben mit dem soeben Gezeigten eine (eindeutige) Darstellung $t^{-m} \cdot \varphi = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + f_n$. Multiplikation mit t^m ergibt

$$a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots + a_{n-1} t^{n-1+m} + f_n t^m.$$

Haben wir n so gewählt, dass $m + n > 0$, so haben wir unsere Darstellung gefunden.

Eindeutigkeit: Wir nehmen an, dass es eine andere Darstellung von φ gibt,

$$\varphi = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \ldots + f_n = a'_k t^k + a'_{k+1} t^{k+1} + \ldots + f'_n.$$

Wir können annehmen, dass $k = m$. Denn ist $m < k$, so können wir $a'_m := a'_{m+1} := \ldots := a'_{k-1} := 0$ setzen. Wir erhalten

$$v_P(0) = v_P(\varphi - \varphi) = v_P((a_m - a'_m)t^m + \ldots + f_n - f'_n).$$

Da $v_P(0) = \infty$, folgt $a_m - a'_m = \ldots = f_n - f'_n = 0$. Denn gäbe es ein r mit $a_r \neq a'_r$, wobei wir r minimal mit dieser Eigenschaft annehmen, so ist $r = v_P(\varphi - \varphi) = \infty$, was ein Widerspruch ist. □

Brechen wir das Verfahren für die Konstruktion der gewünschten Darstellung für ein $\varphi \in \mathcal{O}_P$ nicht ab, so sehen wir, dass sich φ auch in der Form

$$\varphi = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

darstellen lässt. Damit lässt sich aber auch jede beliebige Funktion aus $K(X)$ in der Form

$$a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \ldots$$

darstellen. Man kann zeigen, dass

$$v_P(a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \ldots) = m \text{ mit } a_m \neq 0$$

gilt (vgl. [Sti93], S. 144/145). Damit ist die Entwicklung eindeutig und unser Satz gilt sogar, wenn wir an die Stelle der endlichen Darstellung $a_m t^m + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + f_n$ die unendliche Reihe

$$a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \ldots$$

setzen.
Wir nennen den Körper

$$K((t)) := \left\{ a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \ldots \mid a_i \in K, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

den *Körper der formalen Laurentreihen.* Die Laurentreihenentwicklungen definieren eine Körpereinbettung von $K(X)$ nach $K((t))$.

Definition 2.1.21. Für eine Laurentreihe $\varphi = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i$ definieren wir eine Abbildung $D_t : K((t)) \to K((t))$ durch

$$D_t(\varphi) := \sum_{i=m}^{\infty} i a_i t^{i-1}.$$

Die Abbildung D_t hat folgende Eigenschaften:

- Für $\varphi, \psi \in K((t))$ gilt: $D_t(\varphi + \psi) = D_t(\varphi) + D_t(\psi)$.
- $D_t(\varphi \cdot \psi) = \varphi D_t(\psi) + \psi D_t(\varphi)$.

Damit ist D_t eine Ableitung von $K((t))$. Ist $u \in K((t))$ ein Element, das sich in der Form $u = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ mit $a_1 \neq 0$ darstellen lässt, so ist $K((t)) = K((u))$ und wir können für u in gleicher Weise eine Ableitung D_u definieren. Dann gilt die Kettenregel $D_u(\varphi) \cdot D_t(u) = D_t(\varphi)$ (vgl.[Lan82], S.16/17).

Satz 2.1.3. *Es sei $P \in \mathbb{P}_{K(X)}$ eine Stelle vom Grad 1 und t ein lokaler Parameter in P. Hat $\varphi \in K(X)$ die Darstellung $\sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i \in K((t))$, so ist*

$$\frac{d\varphi}{dt} = D_t(\sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i).$$

Definition 2.1.22. Wir nennen den -1.ten Koeffizienten der Laurentreihe von φ das *Residuum von φ bezüglich des lokalen Parameters t in der Stelle P*. In Zeichen

$$a_{-1} := res_{P,t}(\varphi).$$

Bemerkung 2.1.9. 1. Die Abbildung $res_{P,t} : K(X) \to K$ ist K-linear:

   - $c \cdot res_{P,t}(\varphi) = res_{P,t}(c \cdot \varphi)$, $c \in K$.
   - $res_{P,t}(\varphi + \psi) = res_{P,t}(\varphi) + res_{P,t}(\psi)$.

2. $v_P(\varphi) \geq 0 \;\Rightarrow\; res_{P,t}(\varphi) = 0$.

Definition 2.1.23. Für eine Differentialform $\omega = \varphi \cdot dt \in \Omega_{K(X)}$ definieren wir das *Residuum von ω bezüglich des lokalen Parameters t an der Stelle P* durch

$$res_{P,t}(\omega) := res_{P,t}(\varphi).$$

Satz 2.1.4. *Es sei $P \in \mathbb{P}_{K(X)}$ eine Stelle vom Grad 1 und u, t zwei lokale Parameter in P. Ist $\omega = \varphi \cdot du = \psi \cdot dt \in \Omega_{K(X)}$, so ist*

$$res_{P,u}(\varphi) = res_{P,t}(\psi).$$

BEWEIS. Aus $\omega = \varphi \cdot du = \psi \cdot dt$ folgt $\psi = \varphi \cdot \frac{du}{dt}$. Dann ist $res_{P,t}(\psi) = res_{P,t}(\varphi \cdot \frac{du}{dt})$. Daher genügt es zu zeigen, dass die Gleichung

$$res_{P,u}(\varphi) = res_{P,t}(\varphi \cdot \frac{du}{dt})$$

gilt. Da $v_P(u) = 1$, hat die Laurententwicklung von u in t die Gestalt

$$u = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \quad \text{mit } a_1 \neq 0.$$

Außerdem gilt nach Satz (2.1.3), dass

$$\frac{du}{dt} = a_1 + 2 \cdot a_2 t + \ldots$$

und damit $v_P(\frac{du}{dt}) \geq 0$ ist. Wir betrachten nun die Fälle $v_P(\varphi) \geq 0$ und $v_P(\varphi) < 0$.

1. Es sei $v_P(\varphi) \geq 0$. Mit Bemerkung (2.1.9) folgt $res_{P,u}(\varphi) = 0$.

$$v_P(\varphi \cdot \frac{du}{dt}) =^* v_P(\varphi) + v_P(\frac{du}{dt}) \geq 0 \;\Rightarrow\; res_{P,t}(\varphi \cdot \frac{du}{dt}) = 0.$$

   Das Gleichheitszeichen (*) gilt, weil $\frac{du}{dt} \in K(X)$ ist nach Definition des Quotienten der Differentialformen.

2. Wir wollen zeigen, dass die Behauptung auch für $v_P(\varphi) < 0$ gilt. Dazu untersuchen wir zunächst folgende Fälle:

   - Es sei $\varphi = u^{-1}$. Dann folgt $res_{P,u}(u^{-1}) = 1$. Gleichzeitig ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u} &= \frac{1}{a_1 t + a_2 t^2 + \ldots} \\
&= \frac{1}{a_1 t \cdot (1 + \frac{a_2}{a_1} t + \frac{a_3}{a_1} t^2 + \ldots)} \\
&= \frac{1}{a_1 t \cdot (1 - (-\frac{a_2}{a_1} t - \frac{a_3}{a_1} t^2 - \ldots)} \\
&= \frac{1}{a_1 t} \cdot (\sum_{i=0}^{\infty} (-\frac{a_2}{a_1} t - \frac{a_3}{a_1} t^2 - \ldots)^i) \\
&= \frac{1}{a_1 t} \cdot (1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (\frac{a_2}{a_1} t + \frac{a_3}{a_1} t^2 + \ldots)^i) \\
&= \frac{1}{a_1 t} \cdot (1 + \frac{f_2(a_2)}{a_1} t + \frac{f_3(a_2, a_3)}{a_1^2} t^2 + \ldots)
\end{aligned}$$

für Polynome $f_i(X_2,\ldots,X_i) \in \mathbb{Z}[X_2,\ldots,X_i]$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dt} &= \frac{1}{a_1 t}\cdot(1+\frac{f_2(a_2)}{a_1}t+\frac{f_3(a_2,a_3)}{a_1^2}t^2+\ldots)\cdot(a_1+2a_2t+\ldots)\\
&= \frac{1}{t}\cdot(1+\frac{2a_2}{a_1}t+\ldots)\cdot(1+\frac{f_2(a_2)}{a_1}t+\frac{f_3(a_2,a_3)}{a_1^2}t^2+\ldots)\\
&= \frac{1}{t}\cdot(1+(\frac{2a_2}{a_1}+\frac{f_2(a_2)}{a_1})t+\ldots)\\
&= \frac{1}{t}+(\frac{2a_2}{a_1}+\frac{f_2(a_2)}{a_1})+\ldots.
\end{aligned}$$

Aus $v_P((\frac{2a_2}{a_1}+\frac{f_2(a_2)}{a_1})+\ldots)\geq 0$ folgt

$$res_{P,t}(\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dt}) = res_{P,t}(\frac{1}{t})+res_{P,t}((\frac{2a_2}{a_1}+\frac{f_2(a_2)}{a_1})+\ldots) = 1+0 = 1.$$

- Es sei $\varphi = u^{-n}$ mit $n \geq 2$. Dann ist $res_{P,u}(u^{-n}) = 0$.
  - Es sei $char K = 0$.
    In diesem Fall ist

    $$u^{-n}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1}{-n+1}\cdot\frac{d(u^{-n+1})}{dt}.$$

    Denn die Laurententwicklung von u^{-n+1} in u ist identisch mit sich selbst. Dann ist $D_u(u^{-n+1}) = (-n+1)\cdot u^{-n} \neq 0$ und mit Satz (2.1.3) folgt $\frac{d(u^{-n+1})}{du} = (-n+1)\cdot u^{-n}$. Damit gilt die Gleichung

    $$(-n+1)\cdot u^{-n} = \frac{d(u^{-n+1})}{dt}\cdot\frac{dt}{du}.$$

    Umstellen liefert dann das gewünschte Ergebnis.
    Wir entwickeln u^{-n+1} in eine Laurentreihe in t. Dann haben wir

    $$u^{-n+1} = d_{-n+1}t^{-n+1}+d_{-n+2}t^{-n+2}+\ldots$$

    mit Koeffizienten aus K, und so ist

    $$\frac{d(u^{-n+1})}{dt} = (-n+1)d_{-n+1}t^{-n}+\ldots+(-1)d_{-1}t^{-2}+0\cdot d_0t^0+\ldots.$$

    Daraus folgt, dass

    $$res_{P,t}(\frac{d(u^{-n+1})}{dt}) = 0.$$

Insgesamt haben wir

$$res_{P,t}(u^{-n}\cdot\frac{du}{dt}) = res_{P,t}(\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{d(u^{-n+1})}{dt}) = 0.$$

– Es sei $charK$ beliebig.

$$\begin{aligned}
u^{-n}\cdot\frac{du}{dt} &= \frac{1}{a_1^n t^n}\cdot(1+\frac{f_2(a_2)}{a_1}t+\ldots)^n\cdot(a_1+2a_2t+\ldots)\\
&= \frac{1}{a_1^n t^n}\cdot(1+n\frac{f_2(a_2)}{a_1}t+\ldots)\cdot(a_1+2a_2t+\ldots)\\
&= \frac{1}{a_1^n t^n}\cdot(a_1+(n\frac{a_1f_2(a_2)}{a_1}+2a_2)t+\ldots)\\
&= \frac{1}{a_1^n t^n}\cdot(a_1+\frac{g_2(a_1,a_2)}{a_1}t+\frac{g_3(a_1,a_2,a_3)}{a_1^2}t^2+\ldots)
\end{aligned}$$

mit Polynomen $g_i(X_1,\ldots,X_i)\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_i]$. Diese Polynome sind unabhängig von der Charakteristik von K. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
u^{-n}\cdot\frac{du}{dt} &= \frac{1}{a_1^n t^n}\cdot(a_1+\ldots+\frac{g_n(a_1,\ldots,a_n)}{a_1^{n-1}}t^{n-1}+\ldots)\\
&= \frac{1}{a_1^{n-1}t^n}+\ldots+\frac{g_n(a_1,\ldots,a_n)}{a_1^{2n-1}}t^{-1}+\ldots.
\end{aligned}$$

Im Fall $charK = 0$ ist

$$0 = res_{P,t}(u^{-n}\cdot\frac{du}{dt}) = \frac{1}{a_1^{2n-1}}\cdot g_n(a_1,\ldots,a_n)$$

$$\Rightarrow\ g_n(a_1,\ldots,a_n) = 0,\ \ (a_1\neq 0 \text{ war vorausgesetzt}).$$

Betrachten wir statt u einen anderen lokalen Parameter u' in P mit Entwicklung $u' = b_1t+b_2t^2+\ldots$ in t, so haben wir das Polynom $g_n(b_1,\ldots,b_n)$. Und dieses ist in demselben Körper K gleich Null nach dem soeben Gezeigten. Mit dem nachstehenden Lemma folgert man, dass dann $g_n(X_1,\ldots,X_n) = 0$ gelten muss. Und so erhalten wir für einen Körper mit beliebiger Charakteristik

$$res_{P,t}(u^{-n}\cdot\frac{du}{dt}) = 0.$$

- Es sei nun $\varphi \in F$ eine beliebige Funktion mit $v_P(\varphi) =: -n < 0$. Dann können wir schreiben $\varphi = a_{-n}u^{-n} + a_{-n+1}u^{-n+1} + \ldots$ mit $n \geq 1, a_i \in K$. Somit ist $res_{P,u}(\varphi) = a_{-1}$.

$$\begin{aligned}
res_{P,t}(\varphi \cdot \frac{du}{dt}) &= res_{P,t}((a_{-n}u^{-n} + \ldots + a_{-1}u^{-1} + a_0 + \ldots) \cdot \frac{du}{dt}) \\
&= \sum_{-n}^{-1} res_{P,t}(a_i u^i \cdot \frac{du}{dt}) + res_{P,t}((a_0 + \ldots) \cdot \frac{du}{dt}) \\
&= \sum_{-n}^{-1} a_i \cdot res_{P,t}(u^i \cdot \frac{du}{dt}) + res_{P,t}((a_0 + \ldots) \cdot \frac{du}{dt}) \qquad \square \\
&= 0 + \ldots + 0 + a_{-1} \cdot res_{P,t}(u^{-1} \cdot \frac{du}{dt}) + 0 \\
&= a_{-1} = res_{P,u}(\varphi).
\end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber, führen wir noch das Lemma an, das wir eben für den Beweis des letzten Satzes benötigt haben.

Lemma 2.1.7. *Es sei $g(X_1, ..., X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ ein Polynom. Verschwindet g auf der Teilmenge $(\mathbb{Z}^*)^n$ der Gitterpunktmenge $\mathbb{Z}^n$ des $\mathbb{R}^n$, so ist g das Nullpolynom.*

Beweis. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach n. Wir beschränken uns dabei auf den Induktionsschritt von $n-1$ nach n und setzen voraus, dass das Lemma für $n = 1$ gilt:
Induktionsanfang $n = 1$: Es sei $g(X_1) \in \mathbb{Z}[X_1]$ ein Polynom, das auf $\mathbb{Z}^*$ verschwindet. Dann ist $g(X_1)$ das Nullpolynom.
Induktionsschritt von $n-1$ nach n: Es sei $g(X_1, ..., X_n)$ ein Polynom, das auf der Teilmenge $(\mathbb{Z}^*)^n$ der Gitterpunktmenge $\mathbb{Z}^n$ des $\mathbb{R}^n$ verschwindet. Wir können $g(X_1, ..., X_n)$ als Polynom in der Variablen X_n mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ betrachten und schreiben dafür

$$g(X_n) = a_0(X_1, \ldots, X_{n-1}) + \ldots + a_m(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^m.$$

Betrachten wir nun einen fixierten Gitterpunkt $z := (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in (\mathbb{Z}^*)^{n-1}$, so erhalten wir aus $g(X_n)$ ein Polynom $g_z(X_n)$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ und schreiben dafür

$$g_z(X_n) = a_0(z_1, \ldots, z_{n-1}) + \ldots + a_m(z_1, \ldots, z_{n-1})X_n^m.$$

Da das Polynom $g(X_1, ..., X_n)$ nach Voraussetzung auf $(\mathbb{Z}^*)^n$ verschwindet, verschwindet das Polynom $g_z(X_n)$ für alle ganzen Zahlen $c \in \mathbb{Z}^*$, in Zeichen

$$g_z(c) = \sum_{i=0}^{m} a_i(z_1, \ldots, z_n)c^i = 0.$$

Mit dem Induktionsanfang folgt nun, dass $g_z(X_n)$ das Nullpolynom ist, also $a_i(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0$ für $i = 1, \ldots, m$. Aber auch für jeden anderen Gitterpunkt $z' := (z'_1, \ldots, z'_{n-1}) \in (\mathbb{Z}^*)^{n-1}$ ist $g_{z'}(X_n)$ das Nullpolynom. Damit verschwinden die Koeffizientenpolynome $a_i(X_1, \ldots, X_{n-1})$ auf der Gitterpunktmenge $(\mathbb{Z}^*)^{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann die Koeffizientenpolynome $a_i(X_1, \ldots, X_{n-1})$ identisch 0, womit auch $g(X_1, ..., X_n)$ identisch 0 folgt. $\square$

Wir kehren nun zu den Residuen zurück. Folgende Definition ist jetzt erlaubt:

Definition 2.1.24. Es sei $\omega \in \Omega_{K(X)}$ eine Differentialform. Dann definieren wir das *Residuum einer Differentialform in der Stelle P* durch $res_P(\omega) := res_{P,t}(f)$.

Bemerkung 2.1.10. Die Abbildung $res_P : \Omega_{K(X)} \to K$ ist K-linear:

- $c \cdot res_P(\omega) = res_P(c \cdot \omega)$, $c \in K$.
- $res_P(\omega + \eta) = res_P(\omega) + res_P(\eta)$, $\omega, \eta \in \Omega_{K(X)}$.

Wir wollen in Zukunft folgende Schreibweise verwenden:
Für eine Stelle $P = P_{X-a}$ und eine Differentialform $\omega \in \Omega_{K(X)}$ schreiben wir statt $res_{P_{X-a}}(\omega)$ ab jetzt $res_a(\omega)$. Für die Stelle $P = P_\infty$ schreiben wir anstelle von $res_{P_\infty}(\omega)$ ab jetzt $res_\infty(\omega)$.

2.2 Der Residuensatz für logarithmische Differentialformen

In diesem Abschnitt wollen wir den Residuensatz für logarithmische Differentialformen über $K(X)$ beweisen. Dazu benötigen wir noch das richtige Handwerkszeug:

Definition 2.2.1. Wir definieren die *logarithmische Ableitung* $\log' : K(X)^* \to K(X)$ durch

$$\varphi \mapsto \log' \varphi(X) := \frac{\varphi'(X)}{\varphi(X)}.$$

Außerdem definieren wir eine Abbildung durch

$$d\log : K(X)^* \to \Omega_{K(X)} \; \varphi \mapsto d\log\varphi := \frac{d\varphi}{\varphi}$$

und nennen die Bilder dieser Abbildung *logarithmische Differentialformen.*

Bemerkung 2.2.1. Für rationale Funktionen $\varphi, \psi \neq 0$ gilt:

- $d\ log\varphi = \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{\frac{d\varphi}{dX} \cdot dX}{\varphi} = \frac{\varphi'}{\varphi} \cdot dX = \log' \varphi \cdot dX$.
- $d\ log$ ist additiv:

$$\begin{aligned} d\ \log(\varphi \cdot \psi) &= \frac{(\varphi\psi)'}{\varphi\psi} \cdot dX = \frac{(\varphi'\psi + \varphi\psi')}{\varphi\psi} \cdot dX \\ &= \frac{(\varphi'\psi \cdot dX + \varphi\psi' \cdot dX)}{\varphi\psi} = \frac{\varphi'\psi \cdot dX}{\varphi\psi} + \frac{\varphi\psi' \cdot dX}{\varphi\psi} \\ &= \frac{\varphi' dX}{\varphi} + \frac{\psi' dX}{\psi} = d\ \log\varphi + d\log\psi \end{aligned}$$

Der Kürze wegen schreiben wir ab jetzt λ statt $d\ log$.

Lemma 2.2.1. *Wir betrachten den rationalen Funktionenkörper $K(X)$ mit $charK = p$. Ist $f \in K(X)^*$ eine rationale Funktion mit $v_P(f) = m$ und P eine Stelle vom Grad 1, so gilt:*

1. $v_P(\lambda(f)) = \begin{cases} -1 & \text{falls } p \nmid m \\ \geq 0 & \text{falls } p \mid m \end{cases}$.

2. $res_P(\lambda(f)) = \begin{cases} m & \text{falls } p \nmid m \\ 0 & \text{falls } p \mid m \end{cases}$.

3. $res_P\left(\frac{dX}{X-a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } P = P_{X-a} \\ -1 & \text{falls } P = P_\infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

4. $res_P\left(\frac{dX}{(X-a)^k}\right) = 0\ \forall k \geq 2$.

5. $\sum_P res_P\left(\frac{dX}{(X-a)^k}\right) = 0\ \forall k \geq 1$.

Beweis. 1. Es sei t ein lokaler Parameter in P. Wir wissen, dass

$$\lambda(f) = \frac{1}{f} \cdot df = \frac{\frac{df}{dt} \cdot dt}{f} = \frac{f'}{f} \cdot dt \ \text{ und}$$

$$v_P(g \cdot dt) = v_P(g) + v_P(dt) = v_P(g) + 0 = v_P(g)$$

für ein $g \in K(X)$ ist (Lemma 2.1.6). Es reicht also $v_P(\frac{f'}{f})$ zu bestimmen. Es ist $v_P(\frac{1}{f}) = -m$, denn die Bewertung v_P hat die Eigenschaft, dass $v_P(\frac{1}{f}) = -v_P(f)$ ist. Damit beginnt die Laurententwicklung von f in P bei m, die von $\frac{1}{f}$ in P bei $-m$. Damit haben wir

$$f = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \dots$$

und

$$\frac{1}{f} = b_{-m} t^{-m} + b_{-m+1} t^{-m+1} \dots .$$

Es ist

$$1 = f \cdot \frac{1}{f} = a_m b_{-m} t^{m-m} + \dots = a_m b_{-m} t^0 + \dots,$$

und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $1 = a_m b_{-m}$. Mit

$$\frac{df}{dt} = m \cdot a_m t^{m-1} + (m+1) \cdot a_{m+1} t^m + \dots$$

erhalten wir

$$\frac{f'}{f} = m \cdot a_m \cdot b_{-m} t^{m-1-m} + \dots = m \cdot t^{-1} + \dots,$$

womit $v_P(\lambda(f)) = -1$ und $res_P(\lambda(f)) = m$, falls $p \nmid m$ und $v_P(\lambda(f)) \geq 0$ und $res_P(\lambda(f)) = 0$, falls $p \mid m$.

2. $\surd$

3. Wir betrachten die Funktion $f(X) := X - a$ und bestimmen $res_P(\frac{dX}{X-a})$ für alle möglichen Fälle von P. Die Differentialform $\frac{dX}{X-a}$ ist eine logarithmische Differentialform, denn es gilt die Gleichung

$$\frac{dX}{X-a} = \frac{\frac{d(X-a)}{dX} \cdot dX}{X-a} = \frac{d(X-a)}{X-a} = \lambda(X-a).$$

Wir können damit die Ergebnisse aus 1. und 2. verwenden.

(a) Für $P = P_{X-a}$ ist $v_{P_{X-a}}(X-a) = 1 \ \Rightarrow^{2.} \ res_a(\lambda(f)) = 1$.

(b) Für $P = P_{X-b},\ b \neq a$ ist $v_{P_{X-b}}(X-a) = 0 \ \Rightarrow^{2.} \ res_P(\lambda(f)) = 0$.

(c) Für $P = P_\infty$ ist $v_{P_\infty}(X-a) = -1 \ \Rightarrow^{2.} \ res_P(\lambda(f)) = -1$.

4. (a) Es sei $P = P_{X-a}$. $t = X - a$ ist ein lokaler Parameter in P_{X-a}, und weil

$$\frac{dX}{(X-a)^k} = \frac{(X-a)' dX}{(X-a)^k} = \frac{d(X-a)}{(X-a)^k}$$

gilt, folgt nach Definition

$$\Rightarrow^{Def.} \ res_a\left(\frac{1}{(X-a)^k}\cdot d(X-a)\right) = res_a\left(\frac{1}{(X-a)^k}\right).$$

Die Laurententwicklung von $\frac{1}{(X-a)^k}$ in t ist identisch mit $\frac{1}{t^k}$. Damit ist für $k \neq 1$ das $res_a(\frac{1}{t^k}) = 0$.

(b) Es sei $P = P_{X-b},\ b \neq a$. $t = X - b$ ist ein lokaler Parameter in P_{X-b}, und es gilt die Gleichung

$$\frac{dX}{(X-a)^k} = \frac{(X-b)'dX}{(X-a)^k} = \frac{d(X-b)}{(X-a)^k}.$$

Somit ist

$$res_b\left(\frac{1}{(X-a)^k}\cdot d(X-b)\right) = res_b\left(\frac{1}{(X-a)^k}\right).$$

$v_{P_{X-b}}\left(\frac{1}{(X-a)^k}\right) = 0$, und somit ist $res_b\left(\frac{1}{(X-a)^k}\right) = 0$.

(c) Es sei $P = P_\infty$. Da $t = \frac{1}{X}$ ein lokaler Parameter ist, folgt aus

$$\frac{dX}{(X-a)^k} = \frac{-X^2\cdot d\left(\frac{1}{X}\right)}{(X-a)^k}$$

und nach Definition

$$res_\infty\left(\frac{-X^2\cdot d\left(\frac{1}{X}\right)}{(X-a)^k}\right) = res_\infty\left(\frac{-X^2}{(X-a)^k}\right).$$

$v_{P_\infty}\left(\frac{-X^2}{(X-a)^k}\right) = -2 + k$. Damit ist $v_{P_\infty}\left(\frac{-X^2}{(X-a)^k}\right) \geq 0$ für $k \geq 2$, womit $res_\infty(\frac{dX}{(X-a)^k}) = 0$ folgt.

5. Es sei $k = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_P res_P\left(\frac{dX}{(X-a)}\right) &= res_a\left(\frac{dX}{(X-a)}\right) + \sum_{P_{X-b}} res_b\left(\frac{dX}{(X-a)}\right)\\ &\quad + res_\infty\left(\frac{dX}{(X-a)}\right)\\ &=^{3.}\ 1 + 0 - 1 = 0\end{aligned}$$

Es sei $k \geq 2$:
$res_P\left(\frac{dX}{(X-a)^k}\right) = 0\ \forall k \geq 2 \Rightarrow\ \sum_P res_P\left(\frac{dX}{(X-a)^k}\right) = 0\ \forall k \geq 2$. Also folgt zusammen $\sum_P res_P\left(\frac{dX}{(X-a)^k}\right) = 0\ \forall k \geq 1$. □

Definition 2.2.2. Wir nennen eine Stelle $P \in \mathbb{P}_{K(X)}$ mit $\deg P = 1$ *Punkt von* $K(X)$ und bezeichnen die Menge aller Punkte mit

$$\mathbb{P}^1(K) := \left\{ P \in \mathbb{P}_{K(X)} \mid \deg(P) = 1 \right\}.$$

Satz 2.2.1. *(Residuensatz für logarithmische Differentialformen)*
Es sei $f \in K(X)^*$ eine rationale Funktion. Dann gilt

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\lambda(f)) = 0.$$

Beweis. Es sei $f = g \prod_i (X - a_i)^{k_i}$ mit $k_i \in \mathbb{Z}$ und $g \in \mathcal{O}_P^* \quad \forall P \in \mathbb{P}^1(K)$. Aus der Additivität von λ folgt

$$\begin{aligned} \lambda(f) &= \lambda(g) + \lambda(\prod_i (X - a_i)^{k_i}) \\ &= \lambda(g) + \sum_i \lambda((X - a_i)^{k_i}) \\ &= \lambda(g) + \sum_i k_i \cdot \lambda(X - a_i). \end{aligned}$$

Aus der K-Linearität von $res_P : \Omega_{K(X)} \to K$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\lambda(f)) &= \sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\lambda(g) + \sum_i k_i \cdot \lambda(X - a_i)) \\ &= \sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\lambda(g)) + \sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\sum_i k_i \cdot \lambda(X - a_i)). \end{aligned}$$

Es ist $v_P(g) = 0$, da $g \in \mathcal{O}_P^* \quad \forall P \in \mathbb{P}^1(K)$ gewählt war. Mit Lemma (2.2.1) folgt $res_P(\lambda(g)) = 0$. Damit ist auch $\sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\lambda(g)) = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\sum_i k_i \cdot \lambda(X - a_i)) &= \sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} \sum_i k_i \cdot res_P(\lambda(X - a_i)) \\ &= \sum_i k_i \sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\lambda(X - a_i)) = 0, \end{aligned}$$

denn $\sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\lambda(X - a_i)) = 0$ hatten wir schon gezeigt. $\square$

2.3 Der Residuensatz über $K(X)$

In diesem Abschnitt wollen wir mit Hilfe logarithmischer Differentialformen den Punktresiduensatz beweisen. Dazu benötigen wir noch einen Satz, der für den Beweis des Residuensatzes unentbehrlich ist.

Satz 2.3.1. *Es sei $D \in Div(K(X))$ ein Divisor und $\Omega(D) = \big\{\omega \in \Omega_{K(X)} \mid (\omega) \geq D\big\}$. Dann gilt:*

1. *$\mathfrak{L}(W - D) \cong \Omega(D)$ für alle kanonischen Divisoren $W = (\omega)$.*
2. *Ist W ein kanonischer Divisor, so gilt*
$$l(D) = \deg D + 1 - g + l(W - D)$$
(Satz von Riemann-Roch für rationale Funktionenkörper).

Den Beweis zu diesem Satz findet man auf Seite 38 in [Hol99].

Satz 2.3.2. *(Punktresiduensatz)*
Es sei $K(X)$ der rationale Funktionenkörper über einem beliebigen Körper K und $\omega \in \Omega_{K(X)}$ eine Differentialform, die nur Punkte als Polstellen hat. Dann gilt
$$\sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\omega) = 0.$$

Beweis. Es sei P_ω die Menge aller Polstellen von $\omega \in \Omega_{K(X)}$. Zudem sei $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_r, P_\infty\}$ mit $P_i \neq P_j$ für $i \neq j$ eine Menge von Stellen von $K(X)$ vom Grad 1, für die $P_\omega \subseteq M$ gilt. Wir betrachten den Divisor $A := P_1 + P_2 + \ldots + P_r + P_\infty$ und zeigen den Satz zunächst für den Fall, dass $\omega \in \Omega(-A)$ ist, und führen dann den Fall, dass $\omega \notin \Omega(-A)$ ist, auf den ersten zurück.

1. Es sei $\omega \in \Omega(-A)$.
Zudem bezeichne t_i den lokalen Parameter $X - a_i$ in P_i für $i = 1, \ldots, r$. Wir zeigen, dass die logarithmischen Differentialformen $\ell_i := \lambda(X - a_i)$, $i = 1, \ldots, r$ eine Basis von $\Omega(-A)$ bilden und führen den Beweis des Residuensatzes auf den Residuensatz für logarithmische Differentialformen zurück.
Wir nehmen an, dass die ℓ_i linear abhängig sind, dass also für $c_1\ell_1 + \ldots + c_r\ell_r = 0$ mit $c_1, \ldots, c_r \in K$ ein c_k existiert, so dass $c_k \neq 0$. Dann folgt, dass $v_{P_k}(c_1\ell_1 + \ldots + c_r\ell_r) = v_{P_k}(0) = \infty$. Es ist
$$v_{P_k}(c_1\ell_1 + \ldots + c_r\ell_r) \geq min\left\{v_{P_k}(c_k\ell_k), v_{P_k}(\sum_{i \neq k} c_i\ell_i)\right\},$$

und im Falle $v_{P_k}(c_k\ell_k) \neq v_{P_k}(\sum_{i\neq k} c_i\ell_i)$ gilt sogar die Gleichheit. Es ist $v_{P_k}(X-a_i) = 0$ für $i \neq k$ und wegen Lemma(2.2.1) $v_{P_k}(c_i\ell_i) \geq 0$ für $i \neq k$. Damit haben wir die Ungleichung

$$a := v_{P_k}(\sum_{i\neq k} c_i\ell_i) \geq 0.$$

Außerdem ist $v_{P_k}(X-a_k) = 1$ und somit $v_{P_k}(c_k\ell_k) = -1$. Damit sind a und $v_{P_k}(c_k\ell_k)$ verschieden und wir haben

$$v_{P_k}(c_1\ell_1 + \ldots + c_r\ell_r) = min\,\{-1, a \geq 0\} = -1$$

und damit $v_{P_k}(0) = \infty = -1 = v_{P_k}(c_1\ell_1 + \ldots + c_r\ell_r)$, was ein Widerspruch ist. Also sind die ℓ_i linear unabhängig.
Wir bestimmen nun die Dimension von $\Omega(-A)$. Es gilt $\dim \Omega(-A) = l(W+A)$ für alle kanonischen Divisoren W. Der Divisor $W := (dX) = -2\cdot\infty$ ist kanonisch. Damit haben wir $\dim \Omega(-A) = l(-2\cdot\infty + A)$. Mit dem Satz von Riemann-Roch folgt

$$l(-2\cdot\infty + A) = l(-A) - \deg(-A) - 1 = 0 + r + 1 - 1 = r.$$

Also hat $\Omega(-A)$ die Dimension r, und damit ist die Menge der ℓ_i maximal linear unabhängig, also Basis von $\Omega(-A)$.
Wir betrachten nun eine beliebige Differentialform $\omega = \sum_{i=1}^r b_i\ell_i \in \Omega(-A)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{P\in\mathbb{P}^1(K)} res_P(\omega) &= \sum_{P\in\mathbb{P}^1(K)} res_P(\sum_{i=1}^r b_i\ell_i) \\
&= \sum_{P\in\mathbb{P}^1(K)} (\sum_{i=1}^r b_i\ res_P(\ell_i)) \\
&= \sum_{i=1}^r b_i(\sum_{P\in\mathbb{P}^1(K)} res_P(\ell_i)) = 0.
\end{aligned}$$

2. Es sei nun $\omega \notin \Omega(-A)$.
   Wir wollen mit Hilfe von ω eine Differentialform $\omega'' \in \Omega(-A)$ mit gleichen Residuen konstruieren. Wir konstruieren diese Differentialform in zwei Schritten. Wir hatten vorausgesetzt, dass die Menge der Pole von ω in M enthalten ist.

- Wir wollen zunächst die Pole von ω aus $\{P_1, \ldots, P_r\}$, deren Polordnung größer als 1 ist, auf Pole 1. Ordnung reduzieren, ohne dabei die Residuen von ω zu verändern. Dazu konstruieren wir eine Differentialform ω' und zeigen, dass sie die gewünschten Eigenschaften besitzt.
  Wir bezeichnen mit t_i den lokalen Parameter $X - a_i$ in P_i für $i = 1, \ldots, r$. ω besitzt dann die Darstellungen

$$\omega = (c_{1,m_1} t_1^{m_1} + \ldots + c_{1,-1} t_1^{-1} + \ldots) dt_1,$$

$$\omega = (c_{2,m_2} t_2^{m_2} + \ldots + c_{2,-1} t_2^{-1} + \ldots) dt_2,$$

$$\vdots$$

$$\omega = (c_{r,m_r} t_r^{m_r} + \ldots + c_{r,-1} t_r^{-1} + \ldots) dt_r.$$

  Wir definieren nun für jedes $i = 1, \ldots, r$ eine Differentialform ω_i durch

$$\omega_i = (c_{i,m_i} t_i^{m_i} + \ldots + c_{i,-2} t_i^{-2}) dt_i.$$

  Dabei ist $\omega_i = 0$, falls $v_{P_i}(\omega) \geq -1$ ist. Wir betrachten nun die Differentialform

$$\omega' = \omega - \omega_1 - \ldots - \omega_r.$$

  Für jedes $i = 1, \ldots, r$ können wir ω' in der Form $\omega' = \omega - \omega_i - \ldots - \omega_r$ schreiben und erhalten

$$\omega' = (c_{i,-1} t_i^{-1} + \ldots) dt_i - \ldots - (c_{r,m_r} t_r^{m_r} + \ldots + c_{r,-2} t_r^{-2}) dt_r.$$

  Da die Identität $d(X - a_i) = (X - a_i)' dX = dX$ gilt, ist

$$\omega' = c_{i,-1} \frac{dX}{X - a_i} + \ldots - (c_{r,m_r} \frac{dX}{(X - a_r)^{m_r}} + \ldots + c_{r,-2} \frac{dX}{(X - a_r)^{-2}}).$$

  Dann gilt für die Bewertung von ω' in den Punkten von $K(X)$:

  - $v_{P_i}(\omega') \geq -1$, da die Differentialformen $\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_r$ regulär in P_i sind (für $i = 1, \ldots, r$).
  - Die Differentialformen $\omega_1, \ldots, \omega_r$ sind regulär in P_∞. Damit ist $v_{P_\infty}(\omega') = v_{P_\infty}(\omega)$, falls P_∞ ein Pol von ω ist, und $v_{P_\infty}(\omega') \geq 0$, falls P_∞ kein Pol von ω ist.
  - $v_P(\omega') \geq 0$ für alle $P \notin M$.

  Für die Residuen von ω' gilt:

  - $res_{P_i}(\omega) = res_{P_i}(\omega')$ für $i = 1, \ldots, r$.

  – $res_\infty(\omega) = res_\infty(\omega')$.
  – $res_P(\omega) = res_P(\omega') = 0$ für alle $P \notin M$.

- Hat ω in P_∞ einen Pol der Ordnung größer 1, so müssen wir aus ω' eine Differentialform ω'' konstruieren, die in P_∞ einen Pol maximal erster Ordnung hat und für die $res_\infty(\omega) = res_\infty(\omega'')$ gilt. Dabei dürfen wir die restlichen Residuen nicht ändern. Wir bezeichnen mit t_{r+1} den lokaler Parameter $\frac{1}{X}$ in P_∞. Dann besitzt ω eine Darstellung

$$\begin{aligned}\omega &= (c_{r+1,m_{r+1}} t_{r+1}^{m_{r+1}} + \ldots + c_{r+1,-1} t_{r+1}^{-1} + \ldots) dt_{r+1} \\ &= c_{r+1,m_{r+1}} (\frac{1}{X})^{m_{r+1}} d(\frac{1}{X}) + \ldots + c_{r+1,-1} (\frac{1}{X})^{-1} d(\frac{1}{X}) + \ldots\end{aligned}$$

  Lassen wir die Summanden mit den Indizes $m_{r+1}, \ldots, -2$ weg und nennen wir die entstandene Differentialform ω_∞, so können wir eine Differentialform ω'' definieren durch

$$\omega'' = \omega_\infty - \omega_1 - \ldots - \omega_r.$$

  (Hat ω in P_∞ keinen Pol oder einen Pol erster Ordnung, so ist $\omega = \omega_\infty$.) Wir haben damit das Residuum von ω in P_∞ nicht geändert, und zudem ist $v_{P_\infty}(\omega'') \geq -1$. Das Weglassen dieser Summanden stört nicht die Residuen in den P_i, da die Summanden regulär in den P_i sind. Zudem gilt die Ungleichung $v_{P_i}(\omega'') \geq -1$. Damit ist ω'' eine Differentialform mit gleichen Residuen wie ω und ist zudem ein Element aus $\Omega(-A)$. Damit gilt für ω'' der Residuensatz nach dem ersten Teil des Beweises, und es folgt, dass $\sum_{P \in \mathbb{P}^1(K)} res_P(\omega) = 0$. □

Korollar 2.3.1. *Es sei $K(X)$ der Körper der rationalen Funktionen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und $\omega \in \Omega_{K(X)}$ eine beliebige Differentialform. Dann gilt*

$$\sum_{P \in \mathbb{P}_{K(X)}} res_P(\omega) = 0.$$

Beweis. Da K algebraisch abgeschlossen ist, sind alle Stellen $P \in \mathbb{P}_{K(X)}$ vom Grad 1. Damit sind sämtliche Polstellen von ω Punkte, und mit dem Punktresiduensatz folgt die Behauptung. □

Wir wollen einen zweiten (klassischen) Beweis für dieses Korollar angeben. Dieser Beweis ist insofern klassisch, als dass wir dabei auf [Lan82], S.20 zurückgreifen und unsere Kenntnisse über logarithmische Differentialformen nicht verwenden.

Beweis. (Klassischer Beweis) Erinnerung: Da K algebraisch abgeschlossen ist, ist jede Stelle $P \in \mathbb{P}_{K(X)}$ vom Grad 1. Zudem besitzt ein rationaler Funktionenkörper nur die Stellen $P_{p(X)}$ und P_∞.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass $P = P_{p(X)} = P_{X-a}$. Dann ist $X - a$ ein lokaler Parameter in P_{X-a} und für die Differentialform $\omega = \varphi \cdot dX$ gilt $res_a(\omega) = res_{a,X-a}(\varphi)$. Wir setzen voraus, dass uns $\varphi(X) = \frac{f(X)}{g(X)} \in K(X), g(X) \neq 0$ in gekürzter Form vorliegt. Dann können wir φ in Partialbrüche zerlegen und erhalten die Darstellung

$$\varphi(X) = \sum_{k,i} \frac{c_{k,i}}{(X - a_i)^k} + h(X)$$

mit $h(X) \in K[X]$. Da wir K als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt hatten, zerfällt $\varphi(X)$ in Zähler und Nenner in Linearfaktoren ($f(X), g(X)$ zerfallen in Linearfaktoren). Somit ist die Basis im Nenner jedes Partialbruchs vom Grad 1 und wir haben damit die Summe in unserer Darstellung gerechtfertigt. Gibt es bezüglich P_{X-a} in dieser Darstellung ein i für das $a = a_i$ gilt, so suchen wir uns den Summanden der Form $\frac{c_{1,i}}{X-a_i}$ heraus und erhalten $res_a(\varphi dX) = c_{1,i}$. Gibt es so ein i nicht, dann ist $res_a(\varphi dX) = 0$. Wir berechnen nun die Summe der Residuen über alle Stellen $P_{p(X)}$ und haben

$$\sum_{P_{p(X)}} res_{P_{p(X)}}(\varphi dX) = \sum_i c_{1,i}.$$

Dabei sind fast alle Residuen Null, denn φ enthält nur endlich viele Linearfaktoren, die Summe der Partialbrüche ist endlich.
Wir betrachten nun den Fall, dass $P = P_\infty$ ist.Wir erinnern uns daran, dass $t = \frac{1}{X}$ ein lokaler Parameter in P_∞ ist. $dt = -\frac{1}{X^2}dX$, $-\frac{1}{X^2} = -t^2$ und somit $dX = -\frac{1}{t^2}dt$. Wir ermitteln das Residuum von $\varphi(X)dX = \varphi(\frac{1}{t})\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{t^2} \cdot \varphi\left(\frac{1}{t}\right) &= -\frac{1}{t^2} \cdot \left(\sum_{k,i} \frac{c_{k,i}}{(\frac{1}{t} - a_i)^k} + h\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{t^2} \cdot \sum_{k,i} \frac{c_{k,i}}{(\frac{1}{t} - a_i)^k} - \frac{1}{t^2} \cdot h\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass das $res_\infty(-\frac{1}{t^2} \cdot h\left(\frac{1}{t}\right)) = 0$ ist, und weiter haben wir

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{t^2} \cdot \sum_{k,i} \frac{c_{k,i}}{(\frac{1}{t} - a_i)^k} &= -\frac{1}{t^2} \cdot \sum_{k,i} \frac{c_{k,i}}{(\frac{1}{t}(1 - a_i t))^k} \\
&= -\frac{1}{t^2} \cdot \sum_{k,i} \frac{c_{k,i}}{(\frac{1}{t})^k (1 - a_i t)^k} \\
&= -\sum_{k,i} \frac{c_{k,i} \cdot t^{k-2}}{(1 - a_i t)^k} \\
&= -\sum_{k,i} c_{k,i} \cdot t^{k-2}(1 + a_i t + \ldots)^k =: \tilde{\varphi}
\end{aligned}$$

□

Das $res_\infty(\tilde{\varphi}) = res_\infty(-\sum_i (c_{1,i} t^{-1} + c_{1,i} a_i + \ldots)) = -\sum_i c_{1,i}$. Zusammenfassend haben wir

$$\sum_P res_P(\varphi dX) = \sum_{P_{p(X)}} res_{P_{p(X)}}(\varphi) + res_\infty(\varphi) = \sum_i c_{1,i} - \sum_i c_{1,i} = 0.$$

2.4 Residuensatz und Codierungstheorie

Wir hatten schon im ersten Kapitel erwähnt, dass die klassische Version des Residuensatzes ein funktionentheoretisches Instrument für die Berechnung bestimmter Integrale ist. Eben haben wir die algebraische Version des Residuensatzes für einen rationalen Funktionenkörper $K(X)$ kennen gelernt. In der Codierungstheorie benötigt man den Punktresiduensatz nur für den Fall $K = \mathbb{F}$. Unser Ziel ist es nun, die Rolle des Residuensatzes in der Codierungstheorie darzustellen. Dazu wollen wir zunächst einige elementare Begriffe klären. Wir betrachten einen endlichen Körper $\mathbb{F}$. Wir nennen einen $\mathbb{F}$-linearen k-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{F}^n$ einen *linearen Code*. Seine Elemente heißen *Codewörter*. Für zwei Elemente $a, b \in \mathbb{F}^n$ definieren wir eine Metrik

$$d(a,b) : \#\{i; a_i - b_i \neq 0\}$$

und können so für unseren Code C den *Minimalabstand*

$$d_C := min\{d(a,b); a \neq b, a, b \in C\}$$

definieren. Ein Code $C \subseteq \mathbb{F}^n$ mit $dim_{\mathbb{F}} C = k$ und Minimalabstand $d := d_C$ nennen wir einen *Code vom Typ* (n, k, d). Mit der Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n & \rightarrow & \mathbb{F} \\ (a,b) & \mapsto & \langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i \end{cases}$$

können wir definieren:

- a ist *orthogonal* zu $b \Leftrightarrow_{Def} \langle a, b\rangle = 0$,
- $C^{\perp} := \{u \in \mathbb{F}^n;\ \langle u, c\rangle = 0\ \forall c \in C\}$ heißt der zu C *duale Code.*

Wir können nun aufzeigen, welche Rolle der Residuensatz in der Codierungstheorie spielt. Mit Hilfe des Residuensatzes kann man zeigen, dass der residuelle Goppa-Code $C_\Omega(D, G)$ und der rational-geometrische Goppa-Code $C_\mathcal{L}(D, G)$ dual zueinander sind. Das heißt, dass eine Generatormatrix von $C_\Omega(D, G)$ gleichzeitig auch Kontrollmatrix von $C_\mathcal{L}(D, G)$ ist und umgekehrt. Damit haben wir ein Mittel, um zu entscheiden, ob ein empfangenes Wort zum Code gehört oder nicht. Wir wollen zeigen, dass beide Codes tatsächlich dual zueinander sind. Dazu definieren wir zunächst beide Codes und zeigen ein Lemma, welches für den Beweis des eigentlichen Satzes notwendig ist.

Lemma 2.4.1. *Es sei $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}(X)}$ eine Stelle vom Grad 1 und $f \in \mathcal{O}_P$ eine rationale Funktion. Ist $\omega \in \Omega_{\mathbb{F}(X)}$ eine Differentialform mit $v_P(\omega) \geq -1$, dann gilt*

$$res_P(f \cdot \omega) = f(P) \cdot res_P(\omega).$$

Beweis. Es sei t ein lokaler Parameter in P. Da $v_P(f) \geq 0$, hat die Laurententwicklung von f in t die Gestalt

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots.$$

Es sei $\omega \in \Omega_{\mathbb{F}(X)}$ eine Differentialform. Da $dt \neq 0$, besitzt ω die Darstellung $\omega = g \cdot dt$. Zudem ist t ein lokaler Parameter und es gilt $v_P(g \cdot dt) = v_P(g)$. Da nach Voraussetzung die Ungleichung $v_P(\omega) \geq -1$ gilt, hat die Laurententwicklung von g in t die Gestalt $g = c_{-1}t^{-1} + c_0 t^0 + c_1 t + \ldots$, woraus folgt, dass

$$\omega = (c_{-1}t^{-1} + c_0 t^0 + c_1 t + \ldots)dt.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} res_P(f \cdot \omega) &= res_t(a_0 c_{-1} t^{-1} + (a_0 c_0 + a_1 c_{-1})t^0 + \ldots) \\ &= a_0 c_{-1} \\ &= f(P) \cdot res_P(\omega). \end{aligned}$$

□

Definition 2.4.1. Es seien $P_1, \ldots, P_n$ paarweise verschiedene Stellen aus $\mathbb{P}_{\mathbb{F}(X)}$ vom Grad 1 und D der Divisor der Form $D := P_1 + \ldots + P_n$. Zudem sei $G \in Div(\mathbb{F}(X))$ ein Divisor, so dass $supp(D) \cap supp(G) = \emptyset$ gilt.

- Wir nennen

$$C_{\mathcal{L}}(D,G) := \{(\varphi(P_1),\ldots,\varphi(P_n)) \mid \varphi \in \mathcal{L}(G)\} \subseteq \mathbb{F}^n$$

rational-geometrischen Goppa-Code.

- Der Code

$$C_{\Omega}(D,G) := \{\underbrace{(res_{P_1}(\omega),\ldots,res_{P_n}(\omega))}_{=:Res_D(\omega)}; \mid \omega \in \Omega(G-D)\} \subseteq \mathbb{F}^n$$

heißt *Goppa-Residuen-Code.*

Satz 2.4.1. *Der residuelle Goppa-Code $C_\Omega(D,G)$ und der rational-geometrische Goppa-Code $C_{\mathcal{L}}(D,G)$ sind dual zueinander:*

$$C_\Omega(D,G)^\perp = C_{\mathcal{L}}(D,G).$$

Beweis. Zum Ersten ist zu zeigen, dass jedes Codewort $\varphi(D) \in C_{\mathcal{L}}(D,G)$ orthogonal zu den Codewörtern von $C_\Omega(D,G)$ ist. Es soll also die Gleichung

$$\langle \varphi(D), Res_D(\omega)\rangle = 0$$

gelten. Es ist

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(D), Res_D(\omega)\rangle &= \langle(\varphi(P_1),\ldots,\varphi(P_n)),(res_{P_1}(\omega),\ldots,res_{P_n}(\omega))\rangle \\
&=^{1.} \sum_{i=1}^{n} \varphi(P_i)\cdot res_{P_i}(\omega) \\
&=^{2.} \sum_{i=1}^{n} res_{P_i}(\varphi\cdot\omega) \\
&=^{3.} 0.
\end{aligned}$$

Es bleiben die Gleichheitzeichen 1.-3. zu zeigen:

- (1.) gilt nach Definition.
- (2.) gilt wegen Lemma (2.4.1).
- Wir zeigen, dass (3.) gilt. Es sei $G = m_{Q_1}Q_1 + \ldots + m_{Q_m}Q_m$. Da $\varphi \in \mathcal{L}(G)$ und $\omega \in \Omega(G-D)$ ist, gilt für $\varphi, \omega \neq 0$: $(\varphi\cdot\omega) = (\varphi)+(\omega) \geq -G+G-D$. Damit erhalten wir

$$v_P(\varphi\cdot\omega) \text{ ist } \begin{cases} \geq & -1, \quad \text{falls } P = P_i, i = 1,\ldots,n \\ \geq & 0, \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Nach dem Residuensatz gilt:

$$0 = \sum_{P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F})} res_P(\varphi \cdot \omega) = \sum_{i=1}^{n} res_{P_i}(\varphi \cdot \omega) + \underbrace{\sum_{P \neq P_i, P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F})} res_P(\varphi \cdot \omega)}_{=0}.$$

Damit ist $\sum_{i=1}^{n} res_{P_i}(\varphi \cdot \omega) = 0$ und (3.) gezeigt.

Zeigt man nun noch, dass beide Codes in $\mathbb{F}^n$ komplementäre Dimension haben, so hat man gezeigt, dass die Codes tatsächlich dual zueinander sind. $\square$

Kapitel 3

Der Residuensatz für F/K

Im letzten Kapitel haben wir den sogenannten Punktresiduensatz für beliebige rationale Funktionenkörper $K(X)$ bewiesen. Dabei haben wir auch gesehen, dass bei beliebiger Wahl von K, K stets algebraisch abgeschlossen in $K(X)$ ist. Es ist nun möglich, den Residuensatz für einen beliebigen Funktionenkörper F/K zu zeigen, wo K algebraisch abgeschlossen in F ist. Trotzdem wollen wir uns im dritten Kapitel auf algebraische Funktionenkörper F/K, wo K algebraisch abgeschlossen ist, beschränken, denn [Lan82] bietet uns für diesen Fall einen einfachen Zugang zum Residuensatz. Wir werden also in diesem Kapitel den Residuensatz für den oben beschriebenen Fall beweisen. Dazu nutzen wir unter anderem unser Wissen über Stellen und Bewertungen aus Kapitel 2. Einige Begriffe werden wir jedoch in einer allgemeineren Form handhaben müssen, als wir dies bisher getan haben.

3.1 Vorbemerkungen

Wir wollen den Beweis des Residuensatzes für einen Funktionenkörper F/K (mit den obigen Eigenschaften) auf den Beweis des Residuensatzes für einen rationalen Funktionenkörper reduzieren. Dazu wollen wir zunächst allgemein zwei Funktionenkörper F/K und F'/K' untersuchen, wobei F'/K' eine algebraische Erweiterung von F/K ist. Wie lassen sich die Stellen von F/K mit den Stellen von F'/K' in Verbindung bringen?

Definition 3.1.1. Wir nennen einen algebraischen Funktionenkörper F'/K' eine *algebraische Erweiterung von* F/K, falls $F' \supseteq F$ eine algebraische Körpererweiterung und $K' \supseteq K$ ist.

3.1.1 Bewertungen algebraischer Erweiterungen von Funktionenkörpern

Wir hatten schon in Lemma (2.1.3) des zweiten Kapitels festgestellt, dass jeder algebraische Funktionenkörper unendlich viele Stellen besitzt. Wir bezeichnen die Menge aller Stellen von F/K mit

$$\mathbb{P}_{F/K} := \{P \mid \text{P ist eine Stelle von } F/K\}\,.$$

Wir können nun für jede Stelle $P \in \mathbb{P}_{F/K}$ eine Abbildung v_P wie in Definition (2.1.6) definieren, die eine diskrete Bewertung von F/K bezüglich P ist. Mit Lemma (2.1.2) folgt, dass

$$\mathcal{O}_P = \{\varphi \in F/K \mid \; v_P(\varphi) \geq 0\}\,,$$

$$\mathcal{O}_{P^*} = \{\varphi \in F/K \mid v_P(\varphi) = 0\}\,,$$
$$P = \{\varphi \in F/K \mid v_P(\varphi) > 0\} \text{ ist.}$$

Da wir K als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt hatten, ist jede Stelle P vom Grad 1 und es gilt $\mathcal{O}_P/P = K$. Auf die gleiche Weise wie eben erhalten wir für den Funktionenkörper F'/K' diskrete Bewertungen und Stellenringe. Welche Beziehung besteht aber zwischen den Stellen von F/K und den Stellen eines Funktionenkörpers F'/K', der eine algebraische Erweiterung von F/K ist (vgl. [Sti93], $S.59-63$)?

Definition 3.1.2. Es sei $P \in \mathbb{P}_{F/K}$ und $P' \in \mathbb{P}_{F'/K'}$. Wir sagen, dass P' *über P liegt*, falls $P \subseteq P'$ und schreiben dafür $P' \mid P$. Wir sagen auch P' *ist eine Fortsetzung von P* oder P *liegt unter P'*.

Lemma 3.1.1. *Es sei F'/K' eine algebraische Erweiterung von F/K. Zudem sei $P \in \mathbb{P}_{F/K}$ eine Stelle von F/K, $\mathcal{O}_P$ der zugehörige Stellenring und v_P die zugehörige diskrete Bewertung von F/K. Außerdem sei $P' \in \mathbb{P}_{F'/K'}$ eine Stelle von F'/K', $\mathcal{O}_{P'}$ der zugehörige Stellenring und $v_{P'}$ die zugehörige diskrete Bewertung von F'/K'. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$P' \mid P$.*

2. *$\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{O}_{P'}$.*

3. *Es gibt ein $e \geq 1$, so dass $v_{P'}(\varphi) = e \cdot v_P(\varphi)$ $\forall \varphi \in F$.*

Zudem gilt: $P' \mid P \Rightarrow \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{P'} \cap F$ und $P = P' \cap F$.

Beweis. • (1) $\Rightarrow$ (2) : $P' \mid P \Rightarrow \mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{O}_{P'}$.
Wir nehmen an, dass $\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{O}_{P'}$ nicht gilt. Das heißt, es gibt ein $\varphi \in \mathcal{O}_P$ mit $\varphi \notin \mathcal{O}_{P'}$, also $v_P(\varphi) \geq 0$ und $v_{P'}(\varphi) < 0$. Es sei $t \in F/K$ ein Element mit $v_P(t) = 1$. Da wir vorausgesetzt haben, dass $P' \mid P$, folgt, dass $t \in P'$ und damit $r := v_{P'}(t) > 0$. Dann gilt

$$v_P(\varphi^r \cdot t) = \underbrace{r \cdot v_P(\varphi)}_{\geq 0} + \underbrace{v_P(t)}_{=1} \geq 1 \text{ und}$$

$$\begin{aligned} v_{P'}(\varphi^r \cdot t) &= r \cdot v_{P'}(\varphi) + v_{P'}(t) \\ &= r \cdot v_{P'}(\varphi) + r \\ &= r(\underbrace{v_{P'}(\varphi)}_{<0} + 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Es ist also $\varphi^r \cdot t \in P$, da $v_P(\varphi^r \cdot t) > 0$. Zudem ist aber $\varphi^r \cdot t \notin P'$, da $v_{P'}(\varphi^r \cdot t) \leq 0$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

- (2) $\Rightarrow$ (3) : $\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{O}_{P'} \Rightarrow \exists e \geq 1$ mit $v_{P'}(\varphi) = e \cdot v_P(\varphi) \forall \varphi \in F$.
Es sei $\psi \in F$ ein Element mit $v_P(\psi) = 0$, also $\psi, \psi^{-1} \in \mathcal{O}_P$. Nach Voraussetzung ist dann auch $\psi, \psi^{-1} \in \mathcal{O}_{P'}$, also $v_{P'}(\psi) = 0$. Es sei nun $t \in F$ ein Element mit $v_P(t) = 1$. Es sei $e := v_{P'}(t)$. Da $P \subseteq P'$, folgt $e \geq 1$. Es sei nun $0 \neq \varphi \in F$ ein Element mit $v_P(\varphi) =: r$. Dann ist $v_P(\varphi \cdot t^{-r}) = 0$ und wir haben

$$v_{P'}(\varphi) = v_{P'}(\varphi \cdot t^{-r}) + v_{P'}(t^r) = 0 + r \cdot v_{P'}(t) = e \cdot v_P(\varphi).$$

- (3) $\Rightarrow$ (1) : $\exists e \geq 1$ mit $v_{P'}(\varphi) = e \cdot v_P(\varphi) \forall \varphi \in F \Rightarrow P \subseteq P'$.
$\varphi \in P \subseteq F \Rightarrow v_P(\varphi) > 0 \Rightarrow v_{P'}(\varphi) = \underbrace{e}_{\geq 1} \cdot \underbrace{v_P(\varphi)}_{>0} > 0 \Rightarrow \varphi \in P'$.

Wir verzichten auf den Beweis des letzten Punktes. Dieser kann auf $S.61$ in [Sti93] nachgelesen werden. Uns interessiert jetzt natürlich auch, ob es im Erweiterungskörper F'/K' von F/K Fortsetzungen von Stellen $P \in \mathbb{P}_{F/K}$ gibt. □

Lemma 3.1.2. *1. Für jede Stelle $P' \in \mathbb{P}_{F'/K'}$ gibt es genau eine Stelle $P \in \mathbb{P}_{F/K}$, so dass $P' \mid P$. Und es ist $P = P' \cap F$.*

2. Jede Stelle $P \in \mathbb{P}_{F/K}$ hat mindestens eine aber höchstens endlich viele Fortsetzungen $P' \in \mathbb{P}_{F'/K'}$.

Der Beweis zu diesem Lemma kann in [Sti93] nachgelesen werden. Wir wissen jetzt, dass sich insbesondere die Stellen eines rationalen Funktionenkörpers zu Stellen einer algebraischen Erweiterung von diesem fortsetzen lassen.

Definition 3.1.3. Es sei F'/K' eine algebraische Erweiterung von F/K, sowie $P' \in \mathbb{P}_{F'/K'}$ eine Stelle von F'/K', die über $P \in \mathbb{P}_{F/K}$ liegt. Dann bezeichnen wir die Zahl $e =: e(P' \mid P)$ mit $v_{P'}(\varphi) = e \cdot v_P(\varphi)$ für alle $\varphi \in F/K$ als *Verzweigungsindex von P' über P*.

3.1.2 Ableitungen und Differentialformen von F/K

Ableitungen von F/K

In diesem Abschnitt interessiert uns die Frage, ob ein beliebiger Funktionenkörper F/K Ableitungen besitzt. Wie im letzten Kapitel benötigen wir diese unter anderem im Zusammenhang mit dem Begriff der Differentialform und der Differential-Abbildung von F/K. Wir stützen uns im Folgenden auf [Sti93], Kapitel IV.1. Ein grundlegendes Fundament für diese Untersuchungen bildet die folgende Definition.

Definition 3.1.4. Wir nennen ein Element $s \in F$ ein *separierendes Element* von F/K, falls $F/K(s)$ eine endliche separable Erweiterung ist.

Bemerkung 3.1.1. Ist $s \in F$ ein separierendes Element von F/K, so ist s transzendent über K, und $K(s)/K$ ist ein rationaler Funktionenkörper.

Man kann zeigen, dass F/K (K algebraisch abgeschlossen) tatsächlich separierende Elemente besitzt (siehe [Sti93], S.127/128). Unter dieser Voraussetzung können wir zeigen, dass F/K für genau diese Elemente, zum Beispiel s, eine eindeutig bestimmte Ableitung δ besitzt, so dass $\delta(s) = 1$ gilt. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.1.3. *1. Ist E/F eine endliche separable Erweiterung von F und $\delta_0 : F \to N$ eine Derivation von F/K in einen Körper $N \supseteq E$, so lässt sich δ_0 zu einer Derivation $\delta : E \to N$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist durch δ_0 eindeutig bestimmt.*

2. Ist $s \in F$ ein separierendes Element von F/K und ist $N \supseteq F$ ein Körper, so gibt es eine eindeutige Derivation $\delta : F \to N$ von F/K mit $\delta(s) = 1$.

BEWEIS. 1. Es sei $p(T) = a_0 + a_1 T + \ldots + a_m T^m$ ein Polynom aus $F[T]$ mit Koeffizienten $a_i \in F$. Wir definieren zwei Abbildungen von $F[T] \to N[T]$ durch

$$p(T) \mapsto p'(T) = a_1 + \ldots + m a_m T^{m-1},$$

$$p(T) \mapsto p^0(T) = \delta_0(a_0) + \delta_0(a_1)T + \ldots + \delta_0(a_m)T^m.$$

Beide Abbildungen sind K-linear und erfüllen die Produktregel. Da E/F eine endliche separable Erweiterung von F ist, können wir ein Element $u \in E$ finden, für das $E = F(u)$ ist. Es sei $f(T) \in F[T]$ das Minimalpolynom von u über F. Legen wir fest, dass $n := [E : F] = degf(T)$, so hat jedes Element $\varphi \in E$ eine eindeutige Darstellung $\varphi = h(u)$ mit $h(T) \in F[T]$ und $deg\ h(T) < n$. Wir definieren dann eine Abbildung $\delta : E \to N$ durch

$$\delta(\varphi) := h^0(u) - \frac{f^0(u)}{f'(u)} \cdot h'(u).$$

Man kann zeigen, dass δ tatsächlich eine Derivation von E und eine Fortsetzung von δ_0 ist (vgl. [Sti93], S.136). Die Eindeutigkeit folgt aus einem Lemma, das auf S.135 nachgelesen werden kann.

2. Wir wollen nur die Existenz einer Derivation $\delta : F \to N$ mit $\delta(s) = 1$ beweisen. Es genügt zu zeigen, dass es eine Derivation $\delta_0 : K(s) \to N$ von $K(s)/K$ gibt, die $\delta_0(s) = 1$ erfüllt (nach 1.). Wir setzen

$$\delta_0\left(\frac{f(s)}{g(s)}\right) := \frac{g(s) \cdot f'(s) - f(s) \cdot g'(s)}{g(s)^2},$$

wobei $f(s), g(s) \in K[s]$ und $f'(s)$ die formale Ableitung von $f(s)$ in $K[s]$ bezeichnet. Dann ist δ_0 eine Derivation von $K(s)/K$ mit der gewünschten Eigenschaft. Die Eindeutigkeit folgt, wie oben, aus einem Lemma, das auf S.135 in [Sti93] nachgelesen werden kann. $\square$

Es sei s ein separierendes Element von F/K. Dann gibt es nach 2. eine eindeutige Derivation $\delta : K(s) \to F$ von $K(s)$ mit $\delta(s) = 1$. Da $F/K(s)$ eine endliche separable Erweiterung ist, lässt sich δ nach 1. zu einer Ableitung $\tilde{\delta} : F \to F$ von F/K fortsetzen, die durch δ eindeutig bestimmt ist. Wir dürfen also definieren:

Definition 3.1.5. Es sei s ein separierendes Element von F/K. Dann nennen wir die eindeutige Ableitung $\delta_s : F \to F$, für die $\delta_s(s) = 1$ gilt, *Ableitung nach s*.

Differentialformen von F/K

Der Begriff des Raumes der Differentialformen von F/K wird in [Sti93] auf andere Weise eingeführt, als wir dies tun wollen. Dennoch wollen wir diesen Zugang kurz skizzieren, damit wir die Berechtigung für unsere Zugangsweise erlangen:

Auf der Menge aller Paare $(u, s) \in F \times F$, wobei s ein separierendes Element von F/K ist, definiert man mit Hilfe der Ableitungen δ_s von F/K eine Äquivalenzrelation (Erinnerung: Für jedes separierende Element s von F/K gibt es so eine Ableitung δ_s, die zudem eindeutig ist.). Die Menge dieser Paare zerfällt dann in Äquivalenzklassen, wobei wir die Äquivalenzklasse von (u, s) mit uds bezeichnen wollen. Wir nennen dann uds eine *Differentialform von* F/K und bezeichnen die Menge der Differentialformen von F/K mit $\Omega_{F/K}$ und nennen sie *Raum der Differentialformen von* F/K. Diese Definition ist etwas mühsam und wir wählen statt dessen die folgende Definition.

Definition 3.1.6. Es sei s ein separierendes Element von F/K. Dann nennen wir den Vektorraum

$$\Omega_{F/K} := F \cdot ds = \{u \cdot ds \mid u \in F\}$$

Raum der Differentialformen von F/K.

Unsere Definition ist in Ordnung, denn man kann zeigen, dass ds eine Basis von $\Omega_{F/K}$ ist und so jede Differentialform $\omega \in \Omega_{F/K}$ in der Form $u \cdot ds$ dargestellt werden kann. Ist nun s' ein anderes separierendes Element, so ist auch ds' eine Basis von $\Omega_{F/K}$.

Definition 3.1.7. Die Abbildung

$$d : F \to \Omega_{F/K},\ \varphi \mapsto d\varphi := \delta_s(\varphi) \cdot ds$$

heißt *Differential-Abbildung von* F/K.

Dabei bezeichnet δ_s die Ableitung von F/K, für die $\delta_s(s) = 1$ gilt. Zudem gilt

$$\delta_s(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi \in F \text{ ist ein separierendes Element,}$$

woraus folgt, dass $d\varphi = 0$ ist, falls φ kein separierendes Element von F/K ist. Die Differential-Abbildung besitzt folgende Eigenschaften: Es seien $\varphi, \psi \in F$ beliebig. Dann gilt

1. $d(\varphi + \psi) = d\varphi + d\psi$,
2. $d(c \cdot \varphi) = c \cdot d\varphi$, für $c \in K$,
3. $d(\varphi \cdot \psi) = \varphi d\psi + \psi d\varphi$.

Anschließend können wir noch für zwei Differentialformen $\omega = u \cdot ds, \eta = v \cdot ds \neq 0$ aus $\Omega_{F/K}$ wie in Kapitel 2 den Quotienten der Differentialformen definieren, indem wir

$$\frac{\omega}{\eta} = \frac{u \cdot ds}{v \cdot ds} := \frac{u}{v}$$

setzen. Damit gilt auch die Kettenregel. Ist insbesondere $\varphi \in F$ beliebig und s ein separierendes Element von F/K, so ist der Quotient $\frac{d\varphi}{ds}$ gegeben durch

$$\frac{d\varphi}{ds} = \delta_s(\varphi).$$

In Vorbereitung auf die Definition des Residuums einer Differentialform bezüglich einer Stelle P wollen wir folgende Bemerkung machen:

Bemerkung 3.1.2. Es sei $P \in \mathbb{P}_{F/K}$ eine Stelle vom Grad 1 von F/K und u ein lokaler Parameter in P. Dann ist u ein separierendes Element von F/K. Damit gilt:

1. $du \neq 0$.
2. Es gibt eine eindeutige Ableitung $\delta_u : F \to F$, die $\delta_u(u) = 1$ erfüllt.

3.1.3 Laurententwicklung und Residuum

Es sei F eine endliche separable algebraische Erweiterung eines rationalen Funktionenkörpers über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann ist jede Stelle von F/K vom Grad 1. Es sei $P \in \mathbb{P}_{F/K}$ eine beliebige Stelle und u ein lokaler Parameter in P. Dann besitzt eine beliebige Funktion $\varphi \in F$ eine eindeutige Darstellung $\varphi = \sum_{i=m}^{\infty} a_i u^i$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in K$. Wir hatten schon in Kapitel 2 die Ableitung D_u einer Laurentreihe definiert. Ist nun $\varphi \in F$ eine Funktion mit der Darstellung $\sum_{i=m}^{\infty} a_i u^i \in K((u))$, so gilt die Gleichung

$$\frac{d\varphi}{du} = D_u(\sum_{i=m}^{\infty} a_i u^i).$$

Wir definieren analog zu Kapitel 2 das Residuum einer Differentialform $\omega \in \Omega_{F/K}$, indem wir ω als $\omega = z \cdot du$ schreiben und

$$res_P(\omega) := res_{P,u}(z)$$

setzen. Man kann auch hier zeigen, dass die Definition unabhängig von der Wahl des lokalen Parameters ist.

3.1.4 Der Körper der formalen Laurentreihen $K((t))$

Den Körper $K((t))$ haben wir schon im letzten Kapitel kennen gelernt. In diesem Kapitel wird es so sein, dass wir eine endliche separable algebraische Erweiterung eines rationalen Funktionenkörpers über einem algebraisch abgeschlossenem Körper K betrachten. Wir haben schon gesehen, dass die Stelle P mit lokalem Parameter t des rationalen Funktionenkörpers mindestens eine Fortsetzung P' mit lokalem Parameter u bezüglich des Erweiterungskörpers besitzt. Man kann die Elemente des Erweiterungskörpers bezüglich u in eine Laurentreihe entwickeln, und wir können somit den Erweiterungskörper in $K((u))$ einbetten. Man kann nun für $K((t))$ und $K((u))$ den *Raum der Differentialformen von* $K((t))$ beziehungsweise $K((u))$ und damit auch das *Residuum einer Differentialform* definieren. Die Beziehung, die zwischen den Residuen in $K((t))$ und $K((u))$ besteht, drückt Satz (3.1.2) dieses Abschnittes aus. Da die Differentialformen des rationalen Funktionenkörpers/Erweiterungskörpers etwas mit den Differentialformen von $K((t))/K((u))$ und damit auch mit deren Residuen etwas 'gemeinsam' haben, liefert dieser Satz ein nützliches Werkzeug für den Beweis des Residuensatzes.

Bewertungen von $K((t))$

Wir betrachten den Körper der formalen Laurentreihen

$$K((t)) := \left\{a_m t^m + a_{m+1}t^{m+1} + \ldots \mid m \in \mathbb{Z}, a_i \in K\right\}$$

über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.
Durch die Abbildung $v_t : K((t)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit

$$v_t(0) := \infty,\ v_t(a_m t^m + a_{m+1}t^{m+1} + \ldots) = m \text{ für } a_m \neq 0,$$

wird eine diskrete Bewertung von $K((t))$ definiert. Der Ring der formalen Potenzreihen

$$K\left[[t]\right] := \{a_0 + a_1 t + \ldots \mid a_i \in K\}$$

ist ein Stellenring von $K((t))$ bezüglich dieser Bewertung. Er hat folgende Eigenschaften (vgl.[Hol03]):

1. $K\left[[t]\right]$ besitzt genau ein Maximalideal und zwar

$$P_{K[[t]]} := t \cdot K\left[[t]\right] = \left\{a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \mid a_i \in K\right\}.$$

2. Die Einheitengruppe von $K\left[[t]\right]$ ist

$$K\left[[t]\right]^* := \{a_0 + a_1 t + \ldots \mid a_0 \neq 0, a_i \in K\}.$$

Wir hatten schon in Kapitel 2 gesehen, dass wir eine Funktion φ aus $K(X)$ (K algebraisch abgeschlossen) in P bezüglich eines lokalen Parameters t in eine Laurentreihe $a_m t^m + \ldots$ entwickeln können. Dann gilt $v_P(\varphi) = v_t(a_m t^m + \ldots)$ und v_t ist eine Fortsetzung von v_P.

Differentialformen von $K((t))$

Für eine Laurentreihe $\varphi = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i$ hatten wir eine Ableitung $D_t : K((t)) \to K((t))$ durch

$$D_t(\varphi) := \sum_{i=m}^{\infty} i a_i t^{i-1}$$

definiert. In [Lüt03], S.208 finden wir die Definition für den Raum der Differentialformen von $K((t))$.

Definition 3.1.8. Wir nennen die Menge

$$\Omega_{K((t))/K} := K((t)) \cdot dt = \{\varphi dt \mid \varphi \in K((t))\}$$

Raum der Differentialformen von $K((t))$. Die Abbildung

$$d : K((t)) \to \Omega_{K((t))/K}, \ \varphi \mapsto d\varphi := D_t(\varphi) \cdot dt$$

heißt *Differential-Abbildung von* $K((t))$.

Diese Differential-Abbildung besitzt die schon oben genannten Eigenschaften, und auch hier definieren wir den Quotienten zweier Differentialformen, wie wir dies bisher getan haben.

Bemerkung 3.1.3.

- Es sei φ ein Element eines rationalen Funktionenkörpers über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und t ein lokaler Parameter in der Stelle P. Da φ bezüglich P eine Darstellung der Form $a_m t^m + \ldots$ besitzt, lässt sich die Differentialform φdt des rationalen Funktionenkörpers $K(t)$ auch schreiben als $(a_m t^m + \ldots)dt$ und ist damit eine Differentialform von $K((t))$.

- Ist F eine endliche separable Erweiterung dieses rationalen Funktionenkörpers und u ein lokaler Parameter in der Stelle $P' \in \mathbb{P}_{F/K}$, die über P liegt, so besitzt $\varphi \in F$ eine eindeutige Darstellung $a_n u^n + \ldots$, womit sich die Differentialform $\varphi \cdot du \in \Omega_{F/K}$ auch schreiben lässt als $(a_n u^n + \ldots)du$ und damit eine Differentialform von $K((u))$ ist.

Definition 3.1.9. Es sei $\omega = \varphi \cdot dt$ eine Differentialform von $K((t))$. Dann definieren wir das *Residuum von ω bezüglich des lokalen Parameters t in* $P_{K[[t]]}$ durch

$$res_t(\omega) := res_t(\varphi).$$

Ist t' ein anderer lokaler Parameter in $P_{K[[t]]}$ und ist $\omega = \varphi \cdot dt = \tilde{\varphi} \cdot dt'$, so gilt

$$res_t(\varphi) = res_{t'}(\tilde{\varphi}).$$

Wir dürfen also definieren:

$$res_{P_{K[[t]]}}(\omega) := res_t(\varphi).$$

Bemerkung 3.1.4. Aus Bemerkung (3.1.3) folgt für die Differentialform $\omega = \varphi \cdot dt$ mit einer Funktion φ des rationalen Funktionenkörpers die Korrektheit der Definition $res_P(\omega) = res_{P_{K[[t]]}}(\omega)$.

Haben wir bezüglich der Funktionenkörper und Stellen eine Situation wie in Bemerkung (3.1.3), so ist es wichtig, die Beziehung zwischen den Körpern $K((t))$ und $K((u))$ charakterisieren zu können.

Satz 3.1.1. *Es sei $K((u))$ der Körper der formalen Laurentreihen über K. Zudem sei $0 \neq t \in K((u))$ ein Element mit $m = v_u(t) \geq 1$.*

1. *Dann ist $K((u))$ eine Körpererweiterung von $K((t))$.*

2. *$[K((u)) : K((t))] = m$.*

Beweis.

1. Da $v_u(t) = m$, können wir t in der Form $t = u^m + a_1 u^{m+1} + a_2 u^{m+2} + \ldots$ darstellen (falls notwendig, t mit einer Konstante multiplizieren). Man sieht sofort das $K((t))$ in $K((u))$ enthalten ist.

2. Wir zeigen nun, dass die Dimension des $K((t))$-Vektorraumes $K((u))$ gleich m ist. Dazu zeigen wir, dass die Elemente $1, u, \ldots, u^{m-1}$ eine Basis von $K((u))$ bilden.

   - Mittels Rekursion und rechentechnischem Aufwand kann man zeigen, dass man ein Element $\varphi \in K((u))$ in der Form

     $$\varphi = f_0(t) + f_1(t)u + \ldots + f_{m-1}(t)u^{m-1}$$

     darstellen kann. Damit bilden die Elemente $1, u, \ldots, u^{m-1}$ ein Erzeugendensystem des $K((t))$-Vektorraumes $K((u))$.

   - Die Elemente $1, u, \ldots, u^{m-1}$ sind linear unabhängig, denn nehmen wir an, es gäbe mindestens ein $f_i(t) \neq 0, i = 0, \ldots, m-1$, so dass die Gleichung $0 = f_0(t) + f_1(t)u + \ldots + f_{m-1}(t)u^{m-1}$ gelte, dann folgt für die linke Seite der Gleichung $v_u(0) = \infty$ und für die rechte Seite der Gleichung $v_u(f_0(t) + \ldots + f_{m-1}(t)u^{m-1}) = i$, falls wir $f_i(t)$ minimal mit der obigen Eigenschaft annehmen. Das ist aber ein Widerspruch, woraus die Behauptung folgt. □

Welche Beziehung besteht zwischen den Residuen der Differentialformen von $K((u))$ und denen von $K((t))$? Ein wichtiges Hilfsmittel für die Beantwortung dieser Frage ist die Spurabbildung (vgl. [Lüt03], S.239).

Definition 3.1.10. Es sei

- L/K eine endliche Körpererweiterung,
- $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K,
- $\sigma_1, \dots, \sigma_s : L \to \bar{K}$ die K-Einbettungen von L in $\bar{K}$.

Für ein $\alpha \in L$ definieren wir die *Spur von α* durch

$$Tr_K^L(\alpha) := q \cdot \sum_{i=1}^{s} \sigma_i(\alpha),$$

wobei q der Inseparabilitätsgrad von L über K ist.

Die Spurabbildung $Tr_K^L : L \to K$ ist ein additver Gruppenhomomorphismus. Wir bezeichnen die Spurabbildung $Tr_{K((t))}^{K((u))} : K((u)) \to K((t))$ mit Tr.

Satz 3.1.2. *Es sei $K((u))$ der Körper der formalen Laurentreihen und $0 \neq t \in K((u))$ ein Element, das $m = v_u(t) \geq 1$ erfüllt. Ist φ ein Element aus $K((u))$, so gilt*

$$res_u\left(\varphi \frac{dt}{du} du\right) = res_t(Tr(\varphi)dt).$$

Der Beweis des Satzes ist etwas umständlich. Man findet ihn in [Lan82], $S.18 - 20$.

Satz 3.1.3. *Es sei $K((t))$ der Körper der formalen Laurentreihen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann lässt sich $P_{K[[t]]}$ eindeutig zu einer Stelle einer beliebigen endlichen Erweiterung von $K((t))$ fortsetzen. Es sei E eine endliche algebraische Erweiterung von $K((t))$ und $u \in E$ ein Element mit Bewertung von u gleich 1. Dann können wir E mit $K((u))$ identifizieren, und es gilt $[E : K((t))] = e$.*

Beweis. Wir betrachten eine endliche Erweiterung E von $K((t))$. Dann besitzt die Stelle $P_{K[[t]]}$ mindestens eine aber höchstens endlich viele Fortsetzungen. Wir wollen die Fortsetzungen von $P_{K[[t]]}$ mit $P_1, \dots, P_r$ bezeichnen. Es sei P_i eine solche Fortsetzung von $P_{K[[t]]}$. Dann gibt es eine Zahl $e_i \geq 1$, so dass $v_{P_i}(\varphi) = e_i \cdot v_t(\varphi)$ für alle $\varphi \in K((t))$. Es gibt ein Theorem, welches besagt, dass für die Summe der Verzweigungsindizes von P_i über $P_{K[[t]]}$ die Ungleichung $\sum_{i=1}^{r} e_i \leq [E : K((t))]$ gilt. Damit ist insbesondere $e_i \leq [E : K((t))]$ für alle $i = 1, \dots, r$. Betrachten wir die Fortsetzung P_i von $P_{K[[t]]}$, und gelingt es uns zu zeigen, dass die Gleichung $e_i = [E : K((t))]$ gilt, so ist die Fortsetzung von $P_{K[[t]]}$ eindeutig. Es sei $u \in E$ ein Element mit

$v_{P_i}(u) = 1$. Man muss nun zeigen, dass die Elemente $1, u, \ldots, u^{e_i-1}$ eine Basis des $K((t))$-Vektorraumes E bilden. Die lineare Unabhängigkeit der Elemente $1, u, \ldots, u^{e_i-1}$ folgt mit analogem Argument wie in Satz (3.1.1). Wir verzichten auf den Beweis, dass $1, u, \ldots, u^{e_i-1}$ ein Erzeugendensystem von E ist und dass sich jedes Element von E als Reihe aus $K((u))$ darstellen lässt (siehe dazu auch [Lan82], S.20/21). □

3.2 Der Residuensatz

Wir hatten schon erwähnt, dass wir den Beweis des Residuensatzes für einen Funktionenkörper F/K, K algebraisch abgeschlossen, auf den Beweis des Residuensatzes für rationale Funktionenkörper zurückführen wollen. Erinnerung: Der Körper $K(x)$ heißt rationaler Funktionenkörper, falls $x \in K(x)$ ein über K transzendentes Element ist. In Kapitel 2 haben wir schon einiges über die Stellen, Stellenringe und Differentialformen von $K(x)$ in Erfahrung gebracht und den Residuensatz für den Fall bewiesen, dass K algebraisch abgeschlossen ist. Im Folgenden sei also $K(x)/K$ eine rein transzendente Erweiterung vom Grad 1 und K algebraisch abgeschlossen. Zudem sei F/K eine endliche separable algebraische Erweiterung von $K(x)$. Es sei P eine Stelle von $K(x)$ und t ein lokaler Parameter in P. Zudem seien $P_1, \ldots, P_r$ alle Stellen von F, für die $P_i \mid P$ gilt. Es sei u_i ein lokaler Parameter in P_i für $i = 1, \ldots, r$. Für die Bewertungen v_{P_i} und v_P gilt nach Lemma (3.1.2) die Gleichung $v_{P_i}(t) = e_i \cdot v_P(t)$. Und mit der Gleichung $v_P(t) = 1 = v_{P_i}(u_i)$ folgt $v_{P_i}(t) = e_i \cdot v_{P_i}(u_i)$. Wir haben schon gezeigt, dass wir jede Funktion aus $K(x)$ in eine Laurentreihe bezüglich t entwickeln können. Ebenso können wir eine Funktion aus F in eine Laurentreihe bezüglich u_i entwickeln. In $K((u_i))$ ist u_i ein Element, für das die Gleichung $v_{u_i}(u_i) = 1$ gilt. Die Stelle $P_{K[[t]]}$ setzt sich eindeutig zu der Stelle $P_{K[[u_i]]}$ fort, und für die Körpererweiterung gilt die Gleichung $[K((u_i)) : K((t))] = e_i$ nach Satz (3.1.3). Da F/K eine endliche separable algebraische Erweiterung von $K(x)$ ist, können wir annehmen, dass $F = K(x)(y)$ ist. Es sei $g(Y) \in K(x)\,[Y]$ das Minimalpolynom von y über $K(x)$. Dann zerfällt dieses über $K((t))$ in ein Produkt irreduzibler Faktoren und wir schreiben dafür $g(Y) = g_1(Y) \cdot \ldots \cdot g_s(Y)$. Es sei y_j eine Nullstelle von g_j. Man kann zeigen, dass $s = r$ gilt und dass wir die Körper $K((t))(y_i)$ mit $K((u_i))$ identifizieren dürfen (siehe auch [Lan82], S.23). Bevor wir uns mit dem Residuensatz beschäftigen, wollen wir noch ein Lemma bereitstellen, welches wir für den Beweis des Residuensatzes benötigen.

Lemma 3.2.1. *Wir bezeichnen mit Tr die Spurabbildung $Tr : F \to K(x)$. Zudem bezeichne Tr_i die Spur $Tr_i : K((u_i)) \to K((t))$ für $i = 1, \ldots, r$. Ist*

$\varphi \in F$ eine Funktion, so gilt:

$$Tr(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} Tr_i(\varphi).$$

Der Beweis wird für die Fälle, dass φ erzeugendes Element/nicht erzeugendes Element von F/K ist, geführt. Eine Beweisidee findet man in [Lan82], *S.*23.

Satz 3.2.1. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zudem sei $K(x)$ eine rein transzendente Erweiterung von K der Dimension 1 und F eine endliche algebraische separable Erweiterung von $K(x)$. Es sei $P \in \mathbb{P}_{K(x)}$ eine Stelle von $K(x)$ und $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}_F$ die Stellen von F, für die $P_i \mid P$ für $i = 1, \dots, r$ gilt. Dann gilt für alle $\varphi \in F$*

$$res_P(Tr(\varphi)dx) = \sum_{i=1}^{r} res_{P_i}(\varphi dx).$$

Beweis. Es sei $t \in K(x)$ ein lokaler Parameter in P, sowie $u_1, \dots, u_r \in F$ lokale Parameter in $P_1, \dots, P_r$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} res_{P_i}(\varphi\ dx) &= \sum_{i=1}^{r} res_{P_i}(\varphi\ \frac{dx}{dt}\ dt) \\ &= \sum_{i=1}^{r} res_{P_i}(\varphi\ \frac{dx}{dt}\ \frac{dt}{du_i}\ du_i) \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass wir auf jeden Summanden Satz (3.1.2) anwenden können. Dazu prüfen wir, ob alle Voraussetzungen erfüllt sind.
Da $t \in K((t)) \subseteq K((u_i))$, folgt $t \in K((u_i))$. Außerdem ist t ein Element von $K((u_i))$, für das die Ungleichung $v_{u_i}(t) = e_i \cdot v_t(t) = e_i \geq 1$ gilt. Zudem ist $\varphi \cdot \frac{dx}{dt} \in K((u_i))$. Damit erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{r} res_{P_i}(\varphi\ \frac{dx}{dt}\ \frac{dt}{du_i}\ du_i) = \sum_{i=1}^{r} res_P(Tr_i\left(\varphi\ \frac{dx}{dt}\right)\ dt).$$

Dabei bezeichnen wir mit Tr_i die Spurabbildung $Tr_i : K((u_i)) \to K((t))$. Sie ist bezüglich eines Elementes aus $K(x)$ linear, und weil $\frac{dx}{dt} \in K(x)$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} res_P(Tr_i\left(\varphi\frac{dx}{dt}\right)dt) &= \sum_{i=1}^{r} res_P(Tr_i\,(\varphi)\,\frac{dx}{dt}dt) \\
&= \sum_{i=1}^{r} res_P(Tr_i(\varphi)dx) \\
&= res_P\left(\sum_{i=1}^{r} Tr_i(\varphi)dx\right) \\
&=^{1.}\ res_P(Tr(\varphi)dx)
\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen (1.) gilt wegen Lemma (3.2.1). □

Satz 3.2.2. *Es sei F/K ein algebraischer Funktionenkörper über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Ist $\omega \in \Omega_{F/K}$ eine Differentialform von F/K, so gilt die Gleichung*

$$\sum_{P'\in\mathbb{P}_{F/K}} res_{P'}(\omega) = 0.$$

Beweis. Wir erinnern uns daran, dass F/K separierende Elemente, zum Beispiel s, besitzt. Dann ist F separabel algebraisch über $K(s)$, und eine Differentialform von F/K kann in der Form $\omega = \varphi ds$ geschrieben werden. Damit gilt die Gleichung

$$\sum_{P'\in\mathbb{P}_{F/K}} res_{P'}(\omega) = \sum_{P'\in\mathbb{P}_{F/K}} res_{P'}(\varphi ds).$$

Da F/K eine algebraische Erweiterung von $K(s)$ ist, gilt Lemma (3.1.2). Wir können so jeder Stelle P' von F/K eine Stelle P von $K(s)$ mit $P \subseteq P'$ zuordnen. Dann erhalten wir für jedes P von $K(s)$ eine endliche Anzahl von Stellen P' von F/K mit $P' \mid P$. Wir können damit die Summe $\sum_{P'\in\mathbb{P}_{F/K}} res_{P'}(\varphi ds)$ als eine Summe von endlichen Teilsummen schreiben und erhalten

$$\sum_{P'\in\mathbb{P}_{F/K}} res_{P'}(\varphi ds) = \sum_{P'|P} res_{P'}(\varphi ds) + \sum_{P'|Q} res_{P'}(\varphi ds) + \dots,$$

wobei P, Q zwei verschiedene Stellen von $K(s)$ bezeichnen. Nach Satz (3.2.1) gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{P' \in \mathbb{P}_{F/K}} res_{P'}(\omega) &= \sum_{P'|P} res_{P'}(\varphi ds) + \sum_{P'|Q} res_{P'}(\varphi ds) + \dots \\
&= res_P(Tr(\varphi)ds) + res_Q(Tr(\varphi)ds) + \dots \\
&= \sum_{P \in \mathbb{P}_{K(s)}} res_P(Tr(\varphi)ds) \\
&=^{1.}\ 0.
\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen (1.) gilt, da $Tr(\varphi) \in K(s)$ und somit $Tr(\varphi)ds$ eine Differentialform von $K(s)$ ist. Da wir den Residuensatz schon für rationale Funkrionenkörper gezeigt hatten, folgt nun unmittelbar die Behauptung . □

Literaturverzeichnis

[Fre95] E. Freitag. *Funktionentheorie.* Springer Verlag, 1995.

[Hol99] R.-P. Holzapfel. *Einführung in die algebraische Codierungstheorie.* Vorlesung vom Sommersemester, Humboldt-Universität zu Berlin, 1999.

[Hol03] R.-P. Holzapfel. *Ausgewählte Kapitel der Algebra und Zahlentheorie.* Vorlesung vom Sommersemester, Humboldt-Universität zu Berlin, 2003.

[Lan82] S. Lang. *Introduction to algebraic and abelian functions.* Springer Verlag, 1982.

[Lüt03] W. Lütkebohmert. *Codierungstheorie.* Vieweg Verlag, 2003.

[Pri54] I.I. Priwalow. *Einführung in die Funktionentheorie II.* B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1954.

[Pri58] I.I. Priwalow. *Einführung in die Funktionentheorie I.* B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1958.

[Sti93] H. Stichtenoth. *Algebraic function fields and codes.* Springer Verlag, 1993.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Hausarbeit über das Thema „Der Residuensatz, von der Funktionen- zur Codierungstheorie“ in der gesetzten Frist selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe. Alle Stellen der Arbeit, die anderen Werken wörtlich oder sinngemäß entnommen sind, sind unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. Die Zeichnungen, Kartenskizzen, bildlichen Darstellungen, Statistiken und musik. Notenbeispiele sind von mir verfasst, soweit nicht als Entlehnung gekennzeichnet.

Berlin, den 25. März 2004