

Euler-Picardsche Differentialgleichungen

und

arithmetische Ball-Uniformisierungen

Prof. Dr. Rolf-Peter Holzapfel,
ehemals

Akademie der Wissenschaften, Humboldt-Universität Berlin

December 1, 2009

Abstract

Wir stellen zunächst eine Verbindung her zwischen partielle Differentialgleichungen der Gestalt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} + \frac{1}{t-s} \left(a \frac{\partial}{\partial t} F - c \frac{\partial}{\partial s} F \right) = 0, \quad F = F(s, t).$$

mit dem Produkt von L-Reihen-Werten

$$L(\chi_K, -2) \cdot L(\chi_K, -4) \cdot \dots \cdot L(\chi_K, -2q),$$

wobei χ_K Dirichlet-Charakter eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers K ist. Auf den Zusammenhang stößt man bei der Untersuchung der Verallgemeinerung $y^m = p_n(x)$ hyperelliptischer Kurven. Variiert man (bei festem m, n) die Polynome p_n (n -ten Grades), so erhält man eine algebraische Kurvenfamilie \mathcal{Y}/S . Diesem ist ein Picard-Fuchssches System partieller Differentialgleichungen zugeordnet, das eine Variation m -ter Wurzel-Integrale als Lösungen hat. Im günstigen Falle lassen sich diese multivalenten Lösungen durch den n -dimensionalen Ball

$$\mathbb{B}^n : |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1$$

uniformisieren. Nun erhebt sich die Frage, welche der zugehörigen Monodromie-Gruppen gleichzeitig arithmetische Gruppen der Theorie der Shimura-Varietäten sind. Um sie herauszufiltern, muß man die Kodaira-Klassifikation algebraischer Mannigfaltigkeiten heranziehen. Dazu ist es nötig, die zahlentheoretische Berechnung von Volumina arithmetischer Ball-Gruppen durchzuführen. Auf diese Weise gelangt man zum obigen L-Werte-Produkt. Für die gefundenen Shimura-Flächen liegen interessante Klassifikations-Resultate vor. Auch die zugehörigen Modulformen haben besondere zahlentheoretische Eigenschaften, die eine Hilbertsche Vision bestätigen. Darüber hinaus projizieren Modulformen arithmetische Scheiben des Balles auf ebene Shimura-Kurven. Diese werden optimierend in der algebraischen Kodierungs-Theorie gebraucht.

Zu den Beweisen wird eine Übersicht gegeben, die hauptsächlich auf Ergebnisse der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts namhafter Mathematiker beruht, und auf welche sich aktuelle zukunftsweisende Resultate stützen, an die dieses Memorial heranführt.

Gewöhnliche hypergeometrische Differentialgleichungen

Sie haben die Gestalt

$$x(1-x)f'' + (c - (a+b+1)x)f' - abf = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}$$

Die Lösungen $f = f(x)$ werden hypergeometrische Funktionen genannt. Lokal erhält man Darstellungen

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a} dt, \\ &= 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} x^2 + \dots, \end{aligned}$$

die als hypergeometrische Integrale bzw. hypergeometrische Reihen bekannt sind. Sie haben eine lange Geschichte, die mit Euler (reell) beginnt und bis in die Gegenwart anhält. Gauß interessierte sich für analytische Fortsetzungen und Konvergenzradien im Komplexen dieser nichtelementaren Funktionen. Einen wesentlichen Fortschritt gab es dann durch Arbeiten von L. Fuchs und H.A. Schwarz, die beide aus der Weierstraß-Schule in Berlin hervorgingen.

Höherdimensional: Zykel-elliptische Kurvenfamilien

werden durch

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}/S : y^m &= (x-1)^{b_0} x^{b_0} (x-t_1)^{b_1} \cdot \dots \cdot (x-t_n)^{b_n} \\ m, b, b_0, b_1, \dots, b_n &\in \mathbb{N}_+ \text{ fest.} \end{aligned}$$

über dem Parameterraum

$$\mathbb{A}^n \supset S : 0, 1 \neq t_k, t_i \neq t_j (i \neq j),$$

erklärt. Der (affine) Ring der regulären (rationalen) Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[S] &= \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, (t_i-1)^{-1}, t_j^{-1}, (t_i-t_j)^{-1}], \\ i, j &= 1, \dots, n (i \neq j). \end{aligned}$$

schließt Pole längs der markierten Hyperflächen aus. Die (nichtkommutative)

C-Algebra von Differential-Operatoren

$$\mathbb{C}[S][D] = \mathbb{C}[S][D_1, \dots, D_n], \quad D_i := \frac{\partial}{\partial t_i}$$

wirkt auf den rationalen Funktionen-Körper $\mathbb{C}(S) = \mathbb{C}(t_1, \dots, t_n)$. Dadurch ist die Multiplikation mittels der Komposition von Derivationen erklärt. Die Operationen werden auf $\mathbb{C}(\mathcal{Y}) = \mathbb{C}(S)(x, y)$ fortgesetzt durch die Festlegung

$$D_i : x \mapsto 0, y \mapsto -\frac{b_i y}{n(x - t_i)},$$

letzteres, um die Produktregel der Differentiation zu erhalten. Auf diese Weise gelangt man zum

Gauß-Manin-Zusammenhang,

der auf algebraische Weise Derivationen von Differentialformen erklärt. Dies gelingt modulo exakter Differentialformen. Er erscheint als Kokern in der exakten Folge von Garben

$$0 \longrightarrow d\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{Y}/S}^1 \longrightarrow \mathcal{H}_{DR}^1(\mathcal{Y}/S) \longrightarrow 0,$$

(aus de Rham-Komplex/Kohomologie abgeleitet, Dolbeaux). Genauer ist dann der G.-M. Zusammenhang $\mathcal{H}_{DR}^1(\mathcal{Y}/S)$ eine $\mathbb{C}[S][D]$ -Modulgarbe. Die Grundidee für diese Konstruktion stammt von J.I. Manin [M58].¹ Ableitungen von Integral-Funktionen wurden damit vom Integral-Zeichen abgekoppelt, algebraisiert und so auf Körper mit beliebiger Charakteristik übertragen. Diese Technik wurde dann zu Manin's Beweis der Mordell-Vermutung für algebraische Kurven über Funktionenkörpern verwendet.

Wir betrachten nun

$$\text{Zyklen-Familien } \alpha = \{\alpha_t\}_{t \in W}$$

über Wegen $W \subset S$. Das sind Schnitte über der (lokal konstanten) Homologiegarbe $\mathcal{H}_1(\mathcal{Y}/S, \mathbb{Z})$. Durch faserweise Integration und analytische Fortsetzung gewinnt man $\pi_1(S)$ -multivalente, lokal holomorphe, Funktionen $\oint \omega$ auf S , z.B.

$\oint \frac{dx}{y}$ für $\omega = \frac{dx}{y}$. Diese sind mit unseren Derivationen $\delta \in \mathbb{C}[S][D]$ verträglich.

Die

¹Ich erinnere mich gern an einen Nachmittag Anfang der 80-er. Da besuchte ich mit Juri Manin gemeinsam das Pergamon-Museum. Er gab mir entscheidende Hinweise für meine mathematische Arbeit. Er war in Berlin auf Durchreise, was meine damaligen Vorgesetzten gar nicht mitbekamen. Kurzfristig führte das auch zur ersten Euler-Vorlesung [H83].

Eulerschen Differential-Operatoren

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= D_i D_j + \frac{l}{m(t_j - t_i)}(b_j D_i - b_i D_j) \\ &\in D_i D_j + \mathbb{C}[S]D_i + \mathbb{C}[S]D_j, \quad i \neq j,\end{aligned}$$

annullieren $\frac{x^k dx}{y^l} \in H_{DR}^1(\mathcal{Y}/S)$.

Picardsche Differential-Operatoren

werden durch ihre Zugehörigkeit

$$\varepsilon_{ii} \in D_i D_i + (\mathbb{C}[S]D_1 + \dots + \mathbb{C}[S]D_n) + \mathbb{C}[S],$$

$i \in \{1, \dots, n\}$, definiert.

Satz 1. *Es existieren n Picard-Operatoren $\varepsilon_{ii} = D_i D_i + \dots$, $i = 1, \dots, n$, die $\frac{x^k}{y^l}$ annullieren.*

Sie hängen von $m, n, k, l, b, b_0, b_1, \dots, b_n$ ab und können explizit angegeben werden (Monographie [H86]). Zusammenfassend erhält man das

Euler-Picard-System (der Kurvenfamilie \mathcal{Y}/S) für $\frac{x^k dx}{y^l}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1n}, \\ \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{2n}, \\ \dots \dots \dots \\ \varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \dots, \varepsilon_{nn}\end{aligned}$$

Beispiel. Picard-Kurvenfamilie

$$\mathcal{Y}/S: y^3 = (x-1)x(x-t_1)(x-t_2)$$

$$D_1^2 + \frac{(-5t_1^2 + 4t_1 t_2 + 3t_1 - 2t_2)}{3(t_1-1)t_1(t_2-t_1)} D_1 + \frac{(t_2-t_1)t_2}{3(t_1-1)t_1(t_2-t_1)} D_2 + \frac{t_2-t_1}{9(t_1-1)t_1(t_2-t_1)}$$

ist ε_{11} . Diese Derivation annulliert $\frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)x(x-t_1)(x-t_2)}}$, somit die Kurvenintegrale

$$\oint \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)x(x-t_1)(x-t_2)}}.$$

Theorem 2. (Bi-Korrespondenz)

A) Das Euler-Picard-System der Kurvenfamilie \mathcal{Y}/S für (residuenfreie) $\frac{x^k dx}{y^l}$ hat eine (lokale) Lösungsbasis der Gestalt

$$\oint_{\alpha_0} \frac{x^k dx}{y^l}, \oint_{\alpha_1} \frac{x^k dx}{y^l}, \dots, \oint_{\alpha_n} \frac{x^k dx}{y^l},$$

mit geeigneten Zyklenfamilien $\alpha_i = \alpha_i(t_1, \dots, t_n)$ über S .

B) Jeder Differential-Operator aus $\mathbb{C}[S][D_1, \dots, D_n]$, der alle Integral-Lösungen in A) annulliert, liegt im Linksideal, das von den zugehörigen Euler-Picard-Operatoren ε_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ erzeugt wird.

Monodromie.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S)$ operiert auf Zyklen und damit auf dem Raum der Lösungsbasen. Lösungen werden **multivalent** durch analytische Fortsetzung.

Der Lösungsraum wird zum Darstellungsraum der Fundamentalgruppe:

$$\pi_1(S) \twoheadrightarrow \Gamma \hookrightarrow \mathbb{G}l_{n+1}(\mathbb{C}).$$

Die Bildgruppe Γ bezeichnet man als **Monodromiegruppe** des DGI-Systems. Die universelle Überlagerung \mathcal{U} von S uniformisiert die multivalenten Lösungen:

$$\mathcal{U} \longrightarrow S, \text{ mit Faktorraum } \mathcal{U}/\pi_1(S) = S.$$

Def. Die hyperelliptische Kurvenfamilie $\mathcal{Y}/S : y^m = p_n(x; t)$ heißt **Ball-Familie**, wenn die zugehörige Monodromiegruppe Γ diskrete Untergruppe der unitären Gruppe $\mathbb{U}(n, 1, \mathbb{C})$ ist und $\Gamma \backslash \mathbb{B}$ eine Varietät.

In diesem Falle faktorisiert die Uniformisierung über den n -dimensionalen komplexen Einheitsball

$$(1) \quad \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{B}^n \xrightarrow{p_\Gamma} \overline{S} \text{ (algebr. Kompaktif. von } S),$$

Die analytische Surjektion $\mathbb{B}^n \rightarrow p_\Gamma(\mathbb{B}^n)$ ist lokal endlich (mit unendlichen diskreten Fasern). Sie wird als *verzweigte* Ball-Uniformisierung angesehen.

Mostow, Deligne [DM86] beweisen in den 1980-ern die damals etwa 100 Jahre alte Arbeitshypothese von Picard:

Theorem 3. Für $n > 1$ gibt es (nur) endlich viele Ball-Familien

$$\mathcal{Y}/S : y^m = (x - 1)^{b_0} \cdot \dots \cdot (x - t_n)^{b_n}.$$

Die vollständige Liste wurde nach Picard, Terada, Deligne, Mostow benannt (PTDM-Liste).² Sie wurde zurückgeführt auf die Lösungen diophantischer Gleichungssysteme in den Exponenten $m, b, b_0, b_1, \dots, b_n$. Im Flächenfall $n = 2$ faßt man sie zur Matrixbedingung

(prop 1)

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{m-b_0-b_1} & \frac{m}{m-b_0-b_2} & \frac{m}{m-b_0-b_3} \\ \frac{m}{m-b_1-b_0} & 0 & \frac{m}{m-b_3-b_2} & \frac{m}{m-b-b_3} \\ \frac{m}{m-b_2-b_0} & \frac{m}{m-b_2-b_1} & 0 & \frac{m}{m-b_2-b_3} \\ \frac{m}{m-b_3-b_0} & \frac{m}{m-b_3-b_1} & \frac{m}{m-b_3-b_2} & 0 \end{pmatrix} \in Mat_4(\mathbb{Z} \cup \infty)$$

²Ich nahm auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress 1983 in Warschau die Gelegenheit wahr, mich mit meinen Problemen an P. Deligne zu wenden. Ich erinnere mich gern an seine freundliche Geduld im Gespräch. Aufschlußreich war auch der gemeinsame Spaziergang mit G.D. Mostow am Ausflugstag in die Umgebung von Warschau.

zusammen ($b_3 := b$, Vorauss. $0 < \frac{b_i}{m} < 1$). Es gibt genau 27 Lösungen; In V stehen Verzweigungsordnungen der entsprechenden Balluniformisierungen.

Shimura-Varietäten

Wir beschränken uns auf das Beispiel der Ballquotienten-Varietäten $\Gamma \backslash \mathbb{B}^n$ nach arithmetischen Gruppen Γ , die auf den n -dimensionalen Ball \mathbb{B}^n , siehe (1), operieren. Bei den arithmetischen Gruppen Γ beschränken wir uns - das ist naheliegend - auf Untergruppen der unitären Gruppe $\mathbb{U}((n, 1), \mathbb{C})$. Das Symbol $(n, 1)$ bezeichnet eine hermitesche Metrik der Signatur $(n, 1)$ auf \mathbb{C}^{n+1} , der Einfachheit repräsentiert durch die Diagonalmatrix $D = \text{Diag}(+1, \dots, +1, -1)$, mit der hermiteschen $(n, 1)$ -Form: $\mathbb{C}^{n+1} \ni \mathbf{a}, \mathbf{b} \mapsto \mathbf{a} \cdot D \cdot {}^t \bar{\mathbf{b}}$. Die Lie-Gruppe $\mathbb{U}((n, 1), \mathbb{C})$ wirkt transitiv auf den Ball \mathbb{B}^n . Sie besteht aus allen Elementen von $\mathbb{G}l_{n+1}(\mathbb{C})$, die bei der Wirkung auf den (komplexen) projektiven Raum \mathbb{P}^n den Ball $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{P}^n$ in sich überführen.

Bezeichne nun \mathcal{O}_K den Ring der ganzen Zahlen des imaginär quadratischen Zahlkörpers K . Die arithmetische Gruppe $\Gamma_K = \mathbb{U}((n, 1), \mathcal{O}_K)$ heißt **volle Picardsche Modulgruppe** (von K , der Dimension n).

Definition 4. *Jede Untergruppe Γ endlichen Indexes von $\mathbb{U}((n, 1), \mathcal{O}_K)$ heißt **Picardsche Modulgruppe**. Die Quotienten-Mannigfaltigkeit $\Gamma \backslash \mathbb{B}^n$, und jede ihrer algebraischen Kompaktifizierungen, heißt **Picardscher Modulraum**, im 2-dimensionalen Fall **Picardsche Modulfläche**.*

In der Shimura-Theorie lernt man, daß sie Isometrieklassen spezieller abelscher Varietäten parametrisieren, daher der Name "Modulraum". Die Quotientenräume $\Gamma \backslash \mathbb{B}^n$ sind nie kompakt und nur (bis auf Ausnahmen) für hinreichend kleine Ballgitter Γ singularitätenfrei. Die in der algebraischen Geometrie sehr bekannten Mathematiker J.W. Baily und A. Borel haben in [BB66] gezeigt, daß es immer eine kleinste algebraische Kompaktifizierung $\widehat{\Gamma \backslash \mathbb{B}^n}$ gibt. Diese ist sogar eine projektive Varietät, also Unterraum eines projektiven Raumes \mathbb{P}^N für geeignetes N . Für die Picardschen Modulräume kann man zeigen, daß für die **Baily-Borel-Kompaktifizierung** $\widehat{\Gamma \backslash \mathbb{B}^n}$ die zu $\Gamma \backslash \mathbb{B}^n$ hinzugenommene Kompaktifizierungsmenge nur aus endlich vielen Punkten besteht. Sie werden **Spitzenpunkte** genannt. Meist handelt es sich um (Spitzen-)Singularitäten. Zehn Jahre nach dem Erscheinen der Baily-Borelschen Arbeit wurde eine allgemeinere systematische Kompaktifizierungswerk von D. Mumford, M. Rapoport, A. Ash, Y.S. Tai [AMRT75] vorgelegt, mit dem auch glatte Kompaktifizierungen beherrschte. Sehr stürmisch entwickelte sich auch die Klassifikationstheorie der algebraischen Varietäten weiter. Hier ist vor allen Dingen der japanische Mathematiker K. Kodaira zu nennen. Die Kodaira-Klassifikation arbeitet mit Abbildungsmodellen von Varietäten in projektive Räume \mathbb{P}^N . Invarianten der Varietäten spielen dabei eine wichtige Rolle. Es kommt nun darauf an, Picardsche Modulvarietäten $\widehat{\Gamma \backslash \mathbb{B}^n}$ mit bereits gut bekannten Mannigfaltigkeiten zu identifizieren. Dann kann man in glücklichen Fällen bekannte universelle Überlagerungen heranziehen. In der Fundamentalgruppe werden dann

vorgebene Monodromie-Gruppe und Picardsche Modulgruppe Γ verglichen und eventuell identifiziert. Um diesen Weg weiter zu verfolgen, beschränken wir uns im Weiteren auf die (komplexe) Dimension $n = 2$, also auf

Picardsche Modulflächen.

Der Name wurde von mir Anfang der 80-er des vorigen Jahrhunderts eingeführt. Es wurde nämlich das erste Modell $\Gamma \backslash \mathbb{B}$ entdeckt, das eine Picard-Lefschetz-Monodromiegruppe Γ als arithmetische Gruppe einer Shimura-Varietät erkannte. Man brauchte dazu nur noch die (potentielle Monodromie-) Arbeit [P1883] von Picard über die Kurvenfamilie $y^3 = p_4(x)$ mit [DM86] von Mostow und Deligne in Verbindung zu bringen und zu analysieren. Genauer habe ich es in [H86] dargestellt. So fügten sich "Picard" und "Modulfläche" zusammen zu einem Begriff. Damit eröffnete sich ein Tunnel zwischen den grundlegenden Gebieten der Mathematik:

Analysis / Funktionentheorie / Topologie: Picard-Lefschetz-Monodromie;
 Algebraische Geometrie / Zahlentheorie: Shimura-Varietäten.

Für die Schnittmengen muß sich zwangsläufig ein Feuerwerk entladen. Dazu ist aber noch die genaue Determinierung der Monodromiegruppe Γ (z.B.) der obigen Picard-Kurvenfamilie, für die nur ein endliches Erzeugendensystem bekannt war, in der Shimura-Sprache (Picardsche Modulgruppe) erforderlich. Dazu müssen wir jedoch die Klassifikationstheorie algebraischer Mannigfaltigkeiten weiter verfolgen. Dabei rücken - wie man schon in der klassischen Uniformisierungstheorie algebraischer Kurven mit Hilfe der Kreisscheibe lernt - die

Fundamentaltbereichs-Volumina

in den Mittelpunkt.

Theorem 5. *Das arithmetische Volumen eines Γ_K -Fundamental-Bereiches \mathcal{F}_{Γ_K} im n -dimensionalen Ball \mathbb{B}^n ist das Produkt von L -Reihen- und Zeta-Funktionswerten:*

$$(2) \quad Vol_{ar}(\mathcal{F}_{\Gamma_K}) = \int_{\mathcal{F}_{\Gamma_K}} \alpha = \prod_{2 \leq 2k \leq n} L(\chi_K, -2k) \cdot \prod_{1 \leq 2k-1 \leq n} \zeta(-(2k-1))$$

Dabei ist α eine explizit bekannte **arithmetische Volumenform**, die von K (und n) abhängt,

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \text{ die Riemannsche Zeta-Funktion,}$$

$$L(\chi_K, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_K(m)}{m^s} \text{ die Dirichletsche L-Reihe}$$

mit dem Dirichlet-Charakter $\chi_K(m) = \left(\frac{D_K}{m}\right)$, der das klassische quadratische Restsymbol auf \mathbb{Z} in bekannter Weise fortsetzt (Legendre-Symbol, D_K Diskriminante von K). Es ist bekannt, daß die rechte Seite von (2) eine rationale Zahl ist, die man mit Hilfe (höherer) Bernoulli-Zahlen berechnen kann.³

Die Beweisführung hat einen tiefen zahlentheoretischen Hintergrund, der notwendig die Modernisierungen der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts benutzt. Und zwar wird zunächst die p -Adisierung unserer Ball-Lie-Gruppen \mathbb{G} - die (durch Gleichungen) über \mathbb{Q} definiert sind, mit $\mathbb{G}(\mathbb{Q}) = \mathrm{SU}((n, 1), K)$ - vorgenommen. Wir setzen (n und K festgehalten) $G_p = \mathbb{G}(\mathbb{Q}_p)$ mit dem Körper \mathbb{Q}_p der p -adischen Zahlen. Letztere sind übrigens eine Erfindung (um 1900) des Berliner Mathematikers Kurt Hensel. Mittels eines p -adischen Maßes werden nun p -adische $\mathbb{G}_p(\mathbb{Z}_p)$ -Volumina berechnet. Durch Produkt über alle Primzahlen p und eine Restriktion begann der Adèle-Ring $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \subset \prod_p \mathbb{Q}_p$ seinen Siegeszug in der Zahlentheorie. Verwendet man die Adèle(-Ring-Elemente) als Koeffizienten, so gewinnt man die Adèle-Gruppen

$$\mathbb{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \subset \prod_p \mathbb{G}_p(\mathbb{Q}_p)$$

Auf diesen Gruppen muß man nun die Topologie verstehen, die aus den lokalen Topologien (auf $\mathbb{G}_p(\mathbb{Q}_p)$) zusammengesetzt ist. Es lassen sich nun das **Tamagawa-Maß** einführen, die **Tamagawa-Zahl** berechnen, daraus das arithmetische Volumen als Euler-Produkt angeben, was letztendlich zur Volumenformel (2) führt.

Flächen-Invarianten

Definition 6. Sei X eine (komplexe kompakte) algebraische Mannigfaltigkeit. Die alternierende Summe

$$(3) \quad \mathrm{Eul}(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H_i(X, \mathbb{R})$$

wird **Eulerzahl** von X genannt.

Sie ist - mit anderen Worten - die alternierende Summe $\sum_i (-1)^i b_i$ der Betti-Zahlen b_i .

Bemerkung 7. Verwendet man statt der konstanten Garbe \mathbb{R} in (3) die Strukturgarbe \mathcal{O}_X , so gewinnt man mit $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H_i(X, \mathcal{O}_X)$ das **arithmetische Geschlecht** von X .

³Bei meinem Forschungs-Aufenthalt 1973/74 am Steklov-Institut in Leningrad (Petersburg) lernte ich ein Beispiel in der Dimension 2 kennen, das in einer Moskauer Dissertatinon (O.W. Shvartsman [S74]) ausgearbeitet wurde. Die Verallgemeinerung auf alle Picardschen Modulflächen gelang mir in den folgenden Jahren [H79]. F. Hirzebruch besuchte manchmal die DDR und interessierte sich sehr dafür. In Bonn vergab er die Volumenformel für die Picardschen Modulgruppen in beliebiger Dimension als Dissertationsthema an H. Zeltinger, dem es gelang, die obige Formel aufzustellen.

Von nun an beschränken wir uns auf die Dimension $n = 2$ (komplexe Flächen), da hier inzwischen viele greifbare Resultate vorliegen. Auf der mittleren Homologie $H_2(X, \mathbb{R})$ hat man ein (bilineares symmetrisches) Schnittprodukt.

Definition 8. Die Signatur $Sig(X) = b_2^+ - b_2^-$ dieses Schnittproduktes wird **Signatur** von X genannt.

Aus der Riemann-Roch-Theorie, die von S.S. Chern, F. Hirzebruch⁴ und A. Grothendieck rigouros für beliebige Dimensionen weiterentwickelt wurde, ergeben sich einige Relationen unter den Invarianten, z.B.

$$(4) \quad 4 \cdot \chi(X) = \text{Eul}(X) + \text{Sig}(X).$$

Es existieren eindeutig ($\mathbb{U}((2, 1, \mathbb{C})$ -invariante) Volumen-Formen ε und σ auf dem Ball \mathbb{B}^2 , so daß

$$\text{Eul}(\Gamma \backslash \mathbb{B}) = \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \varepsilon, \quad \text{Sig}(\Gamma \backslash \mathbb{B}) = \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \sigma,$$

jedes Mal gilt, wenn Γ ein (nicht notwendig arithmetisches) torsionsfreies okompaktes Ballgitter ist, d.h. $\Gamma \backslash \mathbb{B}^2$ ist kompakte Fläche.

Definition 9. Die obigen Volumenformen ε und σ heißen **Euler-Form** bzw. **Signatur-Form** des Balles \mathbb{B}^2 .

Bemerkung 10. Damit die Definition korrekt ist, muß man wissen, daß es torsionsfreie kokompakte Ballgitter Γ wirklich gibt. Das wurde in den 50-er Jahren des 20. Jahrhunderts von A. Borel bewiesen. Es gab einen guten Anlaß dazu: Um 1950 gab es noch die Vermutung (Zappa), daß es außer der projektiven komplexen Ebene \mathbb{P}^2 keine Flächen mit positiver Signatur gibt. Das konnte nun durch die obige Volumen-Formel für die Signatur $Sig(\Gamma \backslash \mathbb{B})$, die von F. Hirzebruch stammt, widerlegt werden.

Nun haben wir eine gute Ausgangsbasis, um Picardsche Modulflächen klassifizieren zu können. Die Picardschen Modulgruppen Γ sind allesamt nicht kokompakt. Im allgemeinen sind sie auch nicht torsionsfrei. Typisch ist sogar, daß man es mit vielen Verzweigungskurven der (analytischen) Quotientenabbildung $\mathbb{B} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{B}$ zu tun hat. Statt der Baily-Borel-Kompaktifizierung wählt man am besten - durch Singularitäten-Auflösung - eine (eindeutig zu definierende) Kompaktifizierung, die irreduzible Kurven an Stelle von Spitzenpunkten verwendet. Wir nennen sie - ihrem genauem Konstruktionsweg entlehnt - **toroidale Kompaktifizierung** und bezeichnen sie mit $\overline{\Gamma \backslash \mathbb{B}}$. Wir wollen uns bei diesen Modellen auf glatte Flächen konzentrieren, was wir von nun an voraussetzen. Die Signatur läßt sich nun am einfachsten unter allen Invarianten mit dem Volumen von Fundamentalbereichen in Beziehung setzen:

⁴Bei einem Besuch von F. Hirzebruch in den 70-ern in Ost-Berlin wurde ihm ein Begleiter zugeordnet, den ich bat, mir diese Aufgabe zu überlassen. Interessiert an Hilbertschen Modulflächen/Modulformen wurde ich auf diese Weise über wertvolle neue Resultate informiert.

Theorem 11. *Unter obigen Voraussetzungen gilt*

$$(5) \quad 3 \cdot \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \sigma = 3 \cdot \text{Sig}(\overline{\Gamma \backslash \mathbb{B}}) - (T^2) - \langle \mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}, \mathbf{v}^{-1} \rangle_0$$

Dabei bezeichnet:

T den **Kompaktifizierungs-Divisor**,

(T^2) dessen Selbstschnitt-Index,

$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^r$ den **Verzweigungs-Vektor**,

der abgelesen wird vom

Verzweigungs-Divisor $\mathbf{B} = v_1 C_1 + \dots + v_r C_r \in \text{Div}(\overline{\Gamma \backslash \mathbb{B}})$.

$\mathbf{v}^{-1} = (v_1^{-1}, \dots, v_r^{-1})$ ist der (in \mathbb{Q}^r) **inverse** Verzweigungs-Vektor.

Um die in (5) verwendete Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ auf \mathbb{Q}^r zu erklären, betrachten wir das (bilineare symmetrische) Schnitt-Produkt (\cdot, \cdot) auf dem \mathbb{Q} -Vektorraum $\text{Div}_{\mathbb{Q}} \overline{\Gamma \backslash \mathbb{B}}$ der \mathbb{Q} -Divisoren. Wir schränken dieses zu $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{B}}$ auf den r -dimensionalen Teilraum $\mathbb{Q} \cdot C_1 + \dots + \mathbb{Q} \cdot C_r$ ein. Nun wird diese Metrik additiv zerlegt in

$$(\cdot, \cdot)_{\mathbf{B}} = (\cdot, \cdot)_0 + (\cdot, \cdot)^*,$$

wobei die **punktierte Metrik** $(\cdot, \cdot)_0$ alle Selbstschnitte (C_i^2) , $i = 1, \dots, r$, auf Null setzt bei Erhalt der "echten" Schnittzahlen (C_i, C_j) , $i \neq j$. Nun ist klar, wie man die **gestutzte Metrik** $(\cdot, \cdot)^*$ in umgekehrter Weise definiert. Die Metriken werden mittels der Basis C_1, \dots, C_r unseres Verzweigungsraumes auf \mathbb{Q}^r übertragen. Nun läßt sich auch die Eulerzahl wie folgt berechnen:

Theorem 12. *Für das Euler-Volumen eines Γ -Fundamental-Bereiches gilt*

$$(6) \quad \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \varepsilon = \text{Eul}(\overline{\Gamma \backslash \mathbb{B}}) - 2H_0 - 2 \langle \mathbf{1} - \mathbf{v}^{-1}, \mathbf{v}^{-1} \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle \mathbf{1} - \mathbf{v}^{-1}, \mathbf{1} - \mathbf{v}^{-1} \rangle^*.$$

Dabei ist H_0 die Anzahl der rationalen irreduziblen Kompaktifizierungs-Kurven und $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^r$.

Bemerkung 13. Mit der Additionsformel (4) hat man nun auch eine Volumenformel für das arithmetische Geschlecht. Tatsächlich konnte diese schon früher als die Signatur-Formel (5) hergeleitet werden. Riemann-Roch-Theorie und äquivalente K-Theorie von M.F. Atiyah und I.M. Singer spielten die entscheidende Rolle, siehe z.B. [AS68].

Proportionalität

Es gibt bis auf einen konstanten Faktor nur eine $\mathbb{S}\mathbb{U}(2, 1)$ -invariante Volumenform auf dem Ball. Daher müssen sich - da unsere Volumina rational sind - die Volumenformen um einen rationalen **Proportionalitäts-Faktor** unterscheiden. In beliebigen Dimensionen gelang es F. Hirzebruch in den 50-ern solche Proportionalitäts-Faktoren allgemein im Rahmen der komplexen Differentialgeometrie zu bestimmen. In unserem Ball-Flächen-Fall gilt

$$\text{Eulerform} = \varepsilon = 3\sigma = 3 \cdot \text{Signaturform.}$$

Durch Integration und mit Hilfe der Theoreme 6 und 5 ergibt sich die allgemeine **Proportionalitätsformel** für Ball-Flächen $\overline{\Gamma \setminus \mathbb{B}}$

$$\begin{aligned} & \text{(Prop 2)} \\ (Eul - 3Sig)(\overline{\Gamma \setminus \mathbb{B}}) + (T^2) - 2H_0 - \frac{1}{2} \langle \mathbf{1} - \mathbf{v}^{-1}, \mathbf{1} - \mathbf{v}^{-1} \rangle^* - \langle \mathbf{2} - \mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}, \mathbf{v}^{-1} \rangle_0 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Diese Relation wird als diophantische Gleichung aufgefaßt. Wenn man auf einer glatten Fläche X , deren Invarianten man genau kennt, reduzierte Divisoren T und $C_1 + \dots + C_r$ festlegt, so erhält man eine diophantische Gleichung (Prop 2) für v_1, \dots, v_r als einzigen (ganzzahligen) Unbestimmten. Zusammen mit einem diophantischen Gleichungssystem (Prop 1), das sich auf die Verzweigungskurven stützt, kann man die (endlich vielen) Lösungs-Tupel ausrechnen, siehe [H98]. Das diophantische Gleichungssystem hat selten echte Lösungen. Falls keine existiert, ist X keine Ball-Fläche $\overline{\Gamma \setminus \mathbb{B}}$ mit Kompaktifizierungs/Verzweigungskurve $T + (C_1 + \dots + C_r)$. Andernfalls ist es bisher immer gelungen, die Ballquotienten-Eigenschaft nachzuweisen. Vorreiter für diesen Ball-Test war wieder F. Hirzebruch auf einigen rationalen (del Pezzo-) Flächen und Modellen abelscher Flächen, siehe [BHH86].

Beispiel 14. (*Hirzebruch*) Die del Pezzo-Fläche vom Rang 4 hat genau 10 exzeptionelle Geraden $C_{ij} = C_{ji}$. Wir ordnen ihnen (unbestimmte) Verzweigungsordnungen $v_{ij} = v_{ji}$ zu, $i = 1, \dots, 4, i \neq j$. Wir fragen, welche Divisoren $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} C_{ij}$ von einer Ballüberlagerung herrühren. Fassen wir alle v_{ij} zur Matrix V zusammen, so ist (prop 1) aus dem früheren Monodromie-Abschnitt gerade eine Realisierung von (Prop 1). Es sei bemerkt, daß bei den 27 Lösungen auch $v_{ij} = \infty$ zugelassen ist, und C_{ij} dann als Kompaktifizierungs-Kurve interpretiert, also T zugeschlagen wird.

Bemerkung 15. Die allgemeine, für beliebige glatte Ball-Flächen gültige, obige Proportionalitätsformel (Prop 2) wurde erst in diesem Jahr gefunden. Vorläufer für Spezialfälle sind mir von S. Yau, Y. Miyaoka, R. Kobayashi, F. Hirzebruch (und Mitarbeiter) bekannt. Der kanonische Divisor mußte bekannt sein, was nun überflüssig ist. Diese Lücke wurde allerdings schon in meiner Monographie [H98] geschlossen. Die nun auch vorliegende geschlossene Form von (Prop 1) im glatten Flächen-Falle wird demnächst zusammen mit (Prop 2) publiziert.

Explizite Invarianten Picardscher Modulflächen

Wir wissen, daß alle drei Volumenformen ε , α und σ sich nur um einen (rationalen) Faktor unterscheiden können. Mit Hilfe der Zahlentheorie kann wurde der Faktor ρ_K in

$$\varepsilon = \rho_K \cdot \alpha = 3\sigma,$$

der vom Körper K der Picardschen Modulgruppe Γ abhängt, genau bestimmt. Mit dem arithmetischen Volumen (2) kennen wir damit auch Euler- und Signatur-Volumen:

$$\int_{\mathcal{F}_\Gamma} \varepsilon = \rho_K \cdot \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \alpha = 3 \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \sigma.$$

Nun hat sich mein ehemaliger Doktorand und Akademie-Mitarbeiter J.-M. Feustel eingehend in einer Serie von Arbeiten mit der Zählung und Bestimmung von Spitzen, Singularitäten und Verzweigungskurven beschäftigt. Die Anzahlen sind eng mit Klassenzahl des Körpers K verbunden. Mit Hilfe der Zahlentheorie wurden explizite Berechnungsformeln gefunden. Die Liste seiner Publikationen habe ich in meinem Nachruf [H09] zusammengestellt. Mit Kenntnis der Verzweigungen verwandeln sich diophantische Gleichungen (5) und (6) in Formeln für die Eulerzahl bzw. Signatur, woraus sich dann auch das arithmetische Geschlecht von $\Gamma \backslash \mathbb{B}$ ermitteln läßt.

Extreme Invarianten

Die Relation

$$(7) \quad \text{Eul}(X) = 3 \cdot \text{Sig}(X) > 0$$

ist für Ball-Flächen $X = \Gamma \backslash \mathbb{B}$ mit kokompaktem und torsionsfreiem Ballgitter extrem unter allen Flächen. Von den wohlvertrauten (speziellen) Flächen ist sie nur für die Ebene \mathbb{P}^2 erfüllt. Wir nennen Γ **kokomplanar** falls $\widehat{\Gamma \backslash \mathbb{B}}$ mit der projektiven Ebene übereinstimmt.

Theorem 16. *(Uludag) Es gibt unendlich viele kokomplanare Ballgitter. Die in [U04] konstruierten bilden sogar eine unendliche Normalreihe:*

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \Gamma_3 \supset \dots$$

Theorem 17. *Die folgenden Picardschen Modulflächen zu den Körpern $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ sind rational, d.h. birational isomorph zur Ebene \mathbb{P}^2 :*

$$\widehat{\Gamma_K \backslash \mathbb{B}}, \text{ für } d = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 15, 19, 23, 31, 39, 47.$$

Theorem 18. *Für große d approximieren die Flächen $\widehat{\Gamma_K \backslash \mathbb{B}}$ die extreme Relation (7) beliebig nahe. Sie sind kanonisch (birational) eingebettet in einen projektiven Raum \mathbb{P}^N , $N = N(d)$. Beide Aussagen treffen erst recht für die entsprechenden Hauptkongruenzuntergruppen zu.*

Bemerkung 19. Die Picardschen Modulflächen der vollen Picardschen Modulgruppen sind bei weitem nicht singularitätenfrei. Die Aussagen der letzten beiden Theoreme gelten aber auch für glatte Modelle von ihnen.

Wir verfügen seither - zumindest potentiell - über eine unendliche Armada von Flächen mit positiver Signatur, die in den immer noch ziemlich unbekanntem Gewässern der Flächengeographie kreuzen. Interessant ist auch, daß mit Hilfe der Kenntnis des Verzweigungsdivisors auch - invers zum bisherigen Verlauf - ein zugehöriges System von partiellen Differentialgleichungen aufgestellt werden kann. Sie werden **Picard-Fuchs-Gleichungen** genannt. Dies wurde/wird in japanischen Schule um M. Yoshida bewiesen und praktiziert, [Y87]⁵.

Beispiele 20.⁶ Folgende Picardsche Hauptkongruenz-Untergruppen Γ zu imaginärquadratischen Zahlkörpern K haben glatte Quotienten-Flächen $\widehat{\Gamma \backslash \mathbb{B}}$, die in den Fällen (i) und (ii) sogar mit der projektiven Ebene \mathbb{P}^2 übereinstimmen:

- (i) $K = \mathbb{Q}(i)$, $\Gamma = \Gamma_K(1 - i)$;
- (ii) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\Gamma = \Gamma_K(1 - \rho)$, $\rho = e^{2\pi i/3}$;

Im folgenden Fall ist $\Gamma \backslash \mathbb{B}$ glatt, kompakt und rational:

- (iii) $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $\Gamma = \Gamma_K(1 - \zeta)$, $\zeta = e^{2\pi i/5}$.

Theorem 21. *Es handelt sich um die (bisher gefundenen) Monodromiegruppen, die gleichzeitig Shimura-Gruppen sind, sogar Picard modular in den Fällen (i), (ii). Sie gehören zu den Kurvenfamilien*

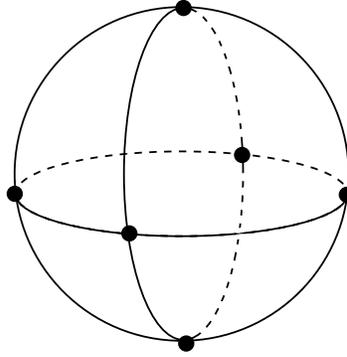
$$y^4 = p_2(x)p_3(x)^2, \quad y^3 = p_4(x), \quad \text{bzw.} \quad y^5 = p^5(x).$$

Reguläre Polyeder

Wir wollen auch ein markantes Beispiel einer speziellen Picardschen Kongruenzfläche $\widehat{\Gamma \backslash \mathbb{B}}$ angeben, die nicht rational ist. Wir nennen sie die **oktahedrale** Picardsche Modulfläche. Sie trägt genau drei rationale Kurven ($\cong \mathbb{P}^1$). Eine **Kurvenkonfiguration** ist eine reelle Skizze der Kurven, die genau die Schnittpunkte widerspiegelt. Sie sieht im oktahedralen Falle ziemlich "global" aus:

⁵Gern erinnere ich mich an die Besuche der japanischen Mathematiker M. Yoshida, H. Shiga (auch T. Terada, R. Kobayashi), in Ostberlin durch die Mauer-Übergänge hindurch. Ich schenkte ihnen dafür später in Japan (Taneguchi-Konferenz 1991) eine Miniatur des Brandenburger Tores.

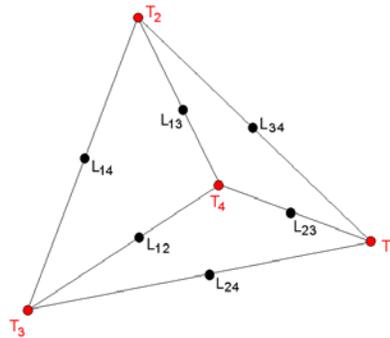
⁶Die Eulerzahl der vollen Picardschen Modulgruppe des Gaußschen Zahlkörpers fand ich in [S74] beim Forschungsaufenthalt am Steklov-Institut in Leningrad (heute St. Petersburg). Folgender glücklichen Umstandskette hatte ich einen 10-monatigen Aufenthalt dort zu verdanken: Zunächst bekam ich eine Delegation an die Leningrader Universität, obwohl ich nach Moskau wollte. An der LU empfing S.I. Borevic die Delegierten. Nach kurzem mathematischem Gespräch teilte er mir mit, daß es an der LU gar keine nennenswerte "Algebraische Geometrie" gäbe, ich könne dort nichts mehr lernen. Aber am Steklov-Institut der Akademie der Wissenschaften arbeitet B.B. Venkov. Dort könnte ich eine Menge dazulernen, was auch geschah.



Die Fläche hat genau 6 Singularitäten. Diese sind gleichzeitig die Schnittpunkte der 3 Kurven. Ferner sind dies auch gerade alle 6 Spitzenpunkte der Fläche, die sich wunderbar zu einem Oktaeder verbinden lassen.

Mit dem Tetraeder/Hexaeder ist das obige Beispiel (ii) eng verbunden. Dabei geht man am besten von der toroidalen Kompaktifizierung $\overline{\Gamma(1-\rho)\backslash\mathbb{B}}$ (glatt) aus. Neben der 4 rationalen Kompaktifizierungskurven gibt es genau 6 Verzweigungskurven. Wir figurieren den dualen Graphen der Kurvenkonfiguration. Dazu zeichnet man für jede der 10 Kurven einen Punkt. Schneiden sich zwei Kurven (einfach), so verbindet man sie mit einer Linie. Auf diese Weise entsteht das folgende Tetraeder, bei dem die Kompaktifizierungskurven als rote Punkte markiert wurden. Die Kanten lassen sich als Diagonalen der Seitenflächen eines Würfels ansehen.

Tetraeder-Figur



Im Beispiel (iii) setzt sich die Verzweigungskurve aus 10 rationalen Kurven zusammen. Wir stellen sie uns als (reelle) Kurvenbögen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ vor, so daß sich ihr Urbild in \mathbb{R}^3 bei der Projektivierungs-Abbildung zu den 20 Kanten eines Dodekaeders zusammenfügt. Wichtig ist, daß die Bewegungsgruppe des Dodekaeders/Ikosaeders auf die Verzweigungskurve visualisiert wird ⁷.

Dodekaeder-Foto



Nach diesem Sprung $2\frac{1}{2}$ Jahrtausende zurück zu Platon, erinnernd auch an F. Kleins bekanntes Ikosaeder-Buch [K1884], bewegen wir uns in diesem Geiste - nur eine komplexe Dimension höher - jetzt zu auf

Picardsche Modulformen

Oktahedral. Gerade kann man eine interessante Entwicklung in Japan beobachten. H. Shiga [KS08] und seinen Ex-Doktoranden Matsumoto und K. Koike ist im Gaußschen Falle (i) die Konstruktion eines Erzeugendensystems Picardscher Modulformen gelungen. Es sind Kombinationen von 4. Potenzen der *Thetakonstanten*

$$\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{p}/2 \\ \mathbf{q}/2 \end{smallmatrix} \right] ((u, v)) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \exp \left\{ \pi i \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \Omega(u, v)^t \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right) + 2\pi i \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \frac{t \mathbf{q}}{2} \right\}$$

⁷Das Magnetstick-Dodekaeder (und andere Polyeder) wurde mit einigem Spaß von Schülern während einer "langen Nacht der Wissenschaften" in Berlin-Adlershof gebastelt.

$$\Omega : \mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{H}_3 \text{ (Siegelgebiet),}$$

mit Theta-Charakteristiken $\frac{\mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{q}}{2} \in \{0, \frac{1}{2}\}^3 \subset \mathbb{Q}^3$.

Tetrahedral. Auch hier ist ein Erzeugendensystem Picardscher Modulformen mit Hilfe 3. Potenzen von Thetakonstanten mit Charakteristiken in $\{0, \frac{1}{3}\}^3$ bekannt. Sie wurden bereits früher von Shiga [S88] konstruiert. In der Langlands-Schule wurde zuvor schon (für alle Picardsche Modulformen) die Möglichkeit der Entwicklung in **Fourier-Jacobi-Reihen** in einer Spitze bewiesen [He72]. Im tetrahedralen Fall (ii) geben wir einer typische Reihe an:

$$f(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(u) q^k, \quad q = e^{\frac{2\pi v}{\sqrt{3}}}$$

Die Koeffizienten $f_k(u)$ sind klassische Theta-Funktionen zum Eisenstein-Gitter auf \mathbb{C} . Explizit wurden sie von Th. Finis [F97] bestimmt. Zu Erzeugenden eines Modulform-Ringes gelangt man, wenn man die Tetraedergruppe auf $f(u, v)$ anwendet.

Dodekahedral. Wie erwartet haben wir es mit dem Beispiel (iii) zu tun. Die Kurven $y^5 = p_5(x)$ haben (allgemein) das Geschlecht 6. Demzufolge wird eine passende Einbettung

$$\Omega : \mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{H}_6 \text{ Siegelgebiet}$$

gewählt, mit deren Hilfe Thetakonstanten

$$\Theta \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{a}/10 \\ \mathbf{b}/10 \end{smallmatrix} \right] (\beta) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^6} \exp \left\{ \pi i (\mathbf{n} + \frac{\mathbf{a}}{10}) \Omega(\beta)^t (\mathbf{n} + \frac{\mathbf{b}}{10}) + 2\pi i (\mathbf{n} + \frac{\mathbf{a}}{10}) \frac{t\mathbf{b}}{10} \right\}$$

mit Thetacharakteristiken in $\frac{1}{10}\mathbb{N}^6$ konstruiert werden.

Genauer werden in der Dissertation von K. Koike [Ko03] für jede der 12 Dodekaederflächen eine Thetakonstante explizit angegeben. Deren Einschränkungen auf den Ball seien

$$(8) \quad \theta_1 = \Theta_1|_{\mathbb{B}}, \dots, \theta_{12} = \Theta_{12}|_{\mathbb{B}}$$

Es handelt sich um $\Gamma(1-\zeta)$ -automorphe Formen (Modulformen) eines Nebentypus. Die Bewegungsgruppe des Dodekaeders/Ikosaeders wirkt auf diese Menge.

Theorem 22. (Koike)

A) Die Quotientenabbildung von \mathbb{B} nach dem Ballgitter $\Gamma(1-\zeta)$ kann analytisch durch die Thetakonstanten (8) beschrieben werden, wie dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & & \\ \downarrow & \searrow^{(\theta_1^5: \dots : \theta_{12}^5)} & \\ \Gamma(1-\zeta) \backslash \mathbb{B} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{P}^{11} \end{array}$$

zu entnehmen ist.

B) Die horizontale Abbildung α ist gerade die antikanonische Einbettung der del Pezzo-Fläche $\Gamma(1 - \zeta) \setminus \mathbb{B}$.

C) Die Thetakonstanten (8) erzeugen den antikanonischen Ring dieser del Pezzo-Fläche. Genauer gilt

$$\mathbb{C}[\theta_1^5(\beta), \dots, \theta_{12}^5(\beta)] \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(-nK_X))$$

mit $X = \Gamma(1 - \zeta) \setminus \mathbb{B}$.

Ebene Shimura-Kurven

Tradition und Globalisierung sind zwei Seiten einer Medaille, die man niemals trennen sollte. Ein besonders sinnfälliges Beispiel dazu liefern Shimura-Kurven. Darunter werden kompakte Shimura-Varietäten der Dimension 1 verstanden. In den 80-ern erhielt mein Akademie-Kollege Th. Zink zusammen mit zwei Moskauer Mathematikern einen IBM-Jahrespreis. Es gelang in [TVZ82] der Nachweis, daß Shimura-Kurven optimale Codes approximieren, die alle bisher bekannten Codes auf p -Kurven mit "vielen Punkten" übertrafen. Es handelt sich allerdings um ein abstraktes Resultat der algebraischen Geometrie, offenbar aber mit globaler Durchschlagskraft.⁸

Was die Tradition betrifft, so muß an eine Vision von D. Hilbert erinnert werden: Er sah eine Möglichkeit der Fortsetzung von Kroneckers Jugendtraum in die höhere Dimension (12. Hilbertsches Problem). Die gefundenen Picard-modularen Monodromie-Gruppen/Flächen bilden eine ausgezeichnete Bestätigung, die zu Anwendungen führen wird. Wir wollen das anhand der projektiven Picard-Ebene $\mathbb{P}^2 = \widehat{\Gamma(1 - i)} \setminus \mathbb{B}$ genauer erläutern.

Wir sind auf der Suche nach ebenen Shimura-Kurven, jede beschrieben durch eine algebraische Gleichung mit Koeffizienten in einem Zahlkörper. Wir wollen sie **ebene arithmetische Shimura-Kurven** nennen. Solche explizit zu finden, wäre von einigem praktischem Nutzen.

Theorem 23. Sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{B}$ eine linear eingebettete (vollständige) Disk im Ball, die durch mindestens zwei $\mathbb{Q}(i)$ -Punkten des Balles geht, nicht aber durch einen $\mathbb{Q}(i)$ -Punkt des Randes $\partial\mathbb{B}$. Dann ist das kompaktifizierte Bild $\widehat{\Gamma(1 - i)} \setminus \mathbb{D}$ von \mathbb{D} bei der Quotientenabbildung $\mathbb{B} \rightarrow \Gamma(1 - i) \setminus \mathbb{B}$ eine ebene arithmetische Shimura-Kurve.

Theorem 24. Es existieren (explizit bekannte) oktaedrale Picardsche Modulformen $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2$, die die Quotienten-Abbildung analytisch beschreiben: Das

⁸Ich erinnere mich daran, daß es Probleme in der DDR gab, den Preis anzunehmen. Ich weiß bis heute nicht genau, ob das damals gelang.

Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{B} & & \\
 \downarrow p & \searrow (\vartheta_0: \vartheta_1: \vartheta_2) & \\
 \Gamma(1-i)\backslash\mathbb{B} & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}^2,
 \end{array}$$

mit horizontaler Kompaktifizierungs-Einbettung ι , ist kommutativ.

Theorem 25. Die Bilder $p(Q) \in \mathbb{P}^2$ von $\mathbb{Q}(i)$ -Punkten $Q \in \mathbb{B}$ sind algebraische Punkte von \mathbb{P}^2 (bei kanonischer Wahl des projektiven Koordinatensystems).

Man folgert Theorem 23 aus 25. Hinter letzterem verbirgt sich ein weitreichendes Algebraizitäts/Transzendenz-Resultat auf Shimura-Varietäten von H. Shiga und J. Wolfart [SW95] sowie meine Arbeit [H94] über Endomorphismen-Algebren von Shimurakurven auf Picardschen Modulflächen. Die Verbindung wurde ausführlich in der Dissertation von M. Petkova [Pe09] behandelt.

Ebene Shimurakurven in klassischer Modulform

Arithmetische Shimura- und Modulkurven $\widehat{\Gamma\backslash\mathbb{D}}$ der Picardschen Modulfläche eines Körpers K sind mit Hilfe natürlicher Zahlen normiert. Man verwendet dazu einen bzgl. der Ausgangs-Disk \mathbb{D} (ballmetrisch) orthogonalen ganzen primitiven Vektor in \mathcal{O}_K^3 , siehe [H03] oder [H07]. Dort findet man auch das folgende

Theorem 26.

I) Die Fourierreihe

$$(9) \quad \sum_{N=0}^{\infty} \left(\left(\frac{3N}{2} - \frac{1}{8} \right) a_2(N) + 3 \sum_{m=1}^N \sigma(m) a_2(N-m) \right) q^N$$

$$q = \exp(2\pi i \tau), \quad \tau \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} \tau > 0,$$

$$\sigma(m): \text{Summe der Teiler von } m;$$

$$a_2(k): \text{Anzahl der } \mathbb{Z}\text{-Lösungen von } x^2 + y^2 = k.$$

ist eine (klassische) Modulform vom Nebentypus $\chi_{\mathbb{Q}}(i)$ und vom Gewicht 3 der Untergruppe $\Gamma_0(4)$ von $\operatorname{Sl}_2(\mathbb{Z})$.

II) Im N -ten Fourier-Koeffizienten von (9) ist die Anzahl aller Modul- und Shimura-Kurven der Norm N der Picard-Ebene $\mathbb{P}^2 = \widehat{\Gamma(1-i)\backslash\mathbb{B}}$. Es gibt einen elementaren Algorithmus, der diese Zahlen genau berechnet.

Die Kette von Ergebnissen folgte einer Hilbertschen Vision aus seinem richtungsweisenden Pariser Vortrag auf dem 2. IMC 1900. Hilbert sah die Möglichkeit einer Fortsetzung von Kroneckers Jugendtraum in die höhere Dimension. Er sah voraus, daß ein enges Zusammenspiel von Funktionentheorie, Algebra und Zahlentheorie vonnöten ist. Für die Picard-Ebene der Eisenstein-Zahlen findet man eine ausführliche Behandlung des Gegenstands in meiner Vorlesung [H95] an der ETH Zürich.⁹

⁹Als Gastprofessor hielt ich die Vorlesung im Wintersemester 1989/90. Dort erfuhr ich,

References

- [AMRT75] Ash, A., Mumford, D., Rapoport, M., Tai, Y.S., *Smooth compactifications of locally symmetric varieties*, Math. Sci. Press, Brookline, 1975
- [AS68] Atiyah, M.F., Singer, I.M., *The index of elliptic operators I,II,II*, Ann. of Math. **87** (1968), 484..604
- [B63] Borel, A., *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topologie, **2** (1963), 111-122
- [BB66] Baily, W.L., Borel, A., *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math. **84** (1966), 442-528
- [BHH86] Barthel, G., Hirzebruch, F., Höfer, T., *Geradenkonfigurationen und Algebraische Flächen*, Aspects of Mathematics D 4, Vieweg, Braunschweig, 1986
- [C84] Cogdell, J.W., *Arithmetic cycles on Picard modular surfaces and modular forms of Nebentypus*, Journ. f. Math. **357** (1984), 115-137.
- [DM86] Deligne, P., Mostow, G.D. *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*, Publ. Math. IHES, **63** (1986), 5-89
- [F97] Finis, T., *Hecke-Eigenwerte Picardscher Modulformen*, Diplomarbeit, Univ. Düsseldorf, 1997
- [He72] Hemperly, J.C., *The parabolic contribution to the number of linearly independent automorphic forms on a certain bounded domain*, Amer. Journ. Math. **94** 1972, 1078-1100
- [H79] Holzapfel, R.-P., *Arithmetische Kugelquotientenflächen III/IV*, Sem.ber. Math. **20**, Humb. Univ. Berlin, 1979
- [H83] Holzapfel, R.-P., *Zweidimensionale periodische Funktionentheorie der Kugel*, Euler-Vorlesung 1982, Preprint-Serie der Akademie der Wissenschaften der DDR, P-Math-12/83 (1983)
- [H86] Holzapfel, R.-P., *Geometry and Arithmetic Around Euler Partial Differential Equations*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft Berlin & Reidel Publ. Company, Dordrecht, 1986
- [H94] Holzapfel, R.-P. *Hierarchies of endomorphism algebras of abelian varieties corresponding to Picard modular surfaces*, Schriftenreihe Komplexe Mannigfaltigkeiten **190**, Univ. Erlangen, 1994

daß ich die (erste DDR-öffentliche) Ausschreibung eines Lehrstuhles in Leipzig gewonnen hatte. Der Vortrag dazu fand am letzten Montag des Oktobers 89 in Hörweite der Montags-Demonstration in vollem Saal statt. Im Mai erfuhr ich dann, daß mein Lehrstuhl unter der letzten DDR-Regierung (rechtsstaatlich ?) wieder kassiert wurde. Zum Glück gab es das Max-Planck-Institut, das nach dem Beitritt der DDR einiges wieder ordentlicher evaluierte.

- [H95] Holzapfel, R.-P., *The ball and some Hilbert problems*, Lect. in Math. ETH Zürich, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1995
- [H98] Holzapfel, R.-P., *Ball and Surface Arithmetics*, Vieweg, Braunschweig, 1998
- [H03] Holzapfel, R.-P., , *Enumerative Geometry for complex geodesics on quasihyperbolic 4-spaces with cusps*, Proc. Conf. Varna 2002, In: Geometry, Integrability and Quantization, ed. by M. Mladenov, L. Naber, Sofia 2003, 42 - 87
- [H07] Holzapfel, R.-P., *Relative proportionality on Picard- and Hilbert modular surfaces*, in [HUY07], 109 - 162
- [H09] Holzapfel, R.-P., *Gedanken an J.-M. Feustel*, Forum der Berliner Math. Ges. **9** (2009), 101-102
- [HV01] Holzapfel, R.-P., Vladov, N., *Quadric-line configurations degenerating plane Picard-Einstein metrics I-II*, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 1997-2000, Berlin (2001), 79 - 142
- [HUY07] Holzapfel, R.-P., Uludag, M., Yoshida, M. (ed.), *Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions*, Progr. in Math. **260**, Birkhäuser, Basel, 2007
- [K1884] Klein, F., *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösungen der Gleichungen fünften Grades*, B.G. Teubner, Leipzig, 1884
- [Ko03] Koike, K., *On the family of pentagonal curves of genus 6 and associated modular forms on the ball*, J. Math. Soc. Japan **55** No. 1 (2003), 165-196
- [KS08] Koike, K. Shiga, S., *An extended Gauß AGM and corresponding Picard Modular Forms*, Journ. of Number Theory **128** (2008) 2097-2126
- [M58] Manin, J.I., *Algebraische Kurven über Körpern mit Derivationen* (russisch), Ak.d.Wiss. UdSSR (1958)
- [Pe09] Petkova, M., *Families of Algebraic Curves with Application in Coding Theory and Cryptography*, Doctoral thesis, Humboldt-Univ. Berlin, 2009
- [P1883] Picard, E., *Sur une extension aux fonctions de deux variables indépendentes analogues aux fonctions modulaires*, Acta mat. **2** (1883), 114-135
- [R07] Riedel, T., *On the Construction of Class Fields by Picard Modular Forms*, in [HUY07], 273-285
- [S88] Shiga, H. *On the representation of the Picard modular function by Theta constants I-II*, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. **24** (1988), 311-360

- [SW95] Shiga, H., Wolfart, J. *Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic functions*, J. reine angew. Math. **463** (1995), 1 - 25
- [S74] Shvartsman, O.W. *On the factor space of an arithmetic group acting on the complex unit ball* (russisch), PhD thesis, MGU, Moscow, 1974
- [TVZ82] Tsfasman, M.A., Vladut, S.G, Zink, T., *Modular curves, Shimura curves and Goppa codes better than Varshamov-Gilbert bound*, Math. Nachr. **109** (1982), 21-28
- [U04] Uludag, M. *Covering Relations Between Ball Quotient Orbifolds*, Mathematische Annalen **308** no. 3 (2004), 503-523
- [Y87] Yoshida, M., *Fuchsian differential equations*, Vieweg, Aspects of Mathematics E 11, Braunschweig, 1987