

Mobile Gleichungsgeschichte(n)

Rolf-Peter Holzapfel

Es ist unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben zu zerlegen, oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate, oder allgemein irgendeine Potenz größer als die zweite in Potenzen gleichen Grades. Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, doch ist der Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.

Pierre de Fermat¹

Zeittafel I

- 1799 Fundamentalsatz der Algebra: Nachweis der prinzipiellen Lösbarkeit jeder (nichtkonstanten) algebraischen Gleichung in der berühmten Doktorarbeit von **C.F. Gauß** .
- 1828 Gauß tritt auf Einladung von Alexander von **Humboldt** (1769-1859) seine Reise nach Berlin an, um sich mit dem großen Weltreisenden und Universalgelehrten auszutauschen.
- 2005 Der Jahresbestseller "Die Vermessung der Welt" (über die Gauß-Reise nach Berlin) von Daniel **Kehlmann** erscheint. Inzwischen wurde diese Geschichte erfolgreich verfilmt und ist als DVD im Handel (2013).
- 2012 Zeitungsnotiz (November): Erstmalig stattet ein Landkreis in Deutschland (Barnim) flächendeckend seine Schulen mit elektronischen (internetfähigen) Tafeln aus.

¹Das Original dieser Randnotiz aus dem Jahre 1630 in Fermats Exemplar des sechsten Arithmetik-Buches des Diophantes von Alexandria ist leider verloren gegangen. Sie wurde aber in die Ausgabe der Werke von Fermat aufgenommen, die dessen Sohn Samuel de Fermat nach 1670 herausgegeben hat, siehe [Si], [CF] S. 208.

Contents

1	Einleitung	1
2	Conica	2
3	Kubische algebraische Gleichungen	3
4	Newtonsche Dynamisierung in der Ebene	5
5	Quartik-Beispiele: Fermat-Kurve und Ei des Kolumbus	6
6	Der Lösungs-Navigator	7
7	Ein Blick zur Galois-Theorie	10
8	Vom komplexen Logarithmus zur Riemann-schen Fläche	11
9	Numerische Vorgeschichte zum Fermatschen Satz	13
10	Nichteuklidische Vorbereitungen	14
11	Sprung ins 20. Jahrhundert	16
12	Die große Verschmelzung	16

1 Einleitung

Im Anfang war: Die VISION

In Anlehnung an Faust I (Goethe)

Die Geschichte der Mathematik ist auch die Geschichte von Visionen, die zunächst nebelhaft auftauchen, im Wechselspiel mit zahlreichen Berechnungen, Formel- und Beweis-Ansätzen, bis sich klare Konturen herausbilden. Die nutzbaren Ergebnisse wurden in Schriften festgehalten, in Büchern, die zum Teil berühmt und populär wurden. Die Visionen wurden und werden in zahlreichen Bildfolgen an die nächsten Generationen weitervererbt. Einige spektakuläre Anwendungen erscheinen seit dem vorigen Jahrhundert in Filmen und Videos.

Ein angehender/lernender Wissenschaftler muss wissen, dass es zwar hilfreich, aber ziemlich passiv ist, sich mit einem Film/Video beginnend die Entwicklungsgedanken zu erschließen. In der Mathematik ist der Weg von Forschungsergebnissen bis zu filmreifen Anwendungen besonders weit. Umso wichtiger ist es, die unmittelbaren Visionen der Koryphäen genauer kennenzulernen. Die neue Mathe-Software macht es möglich, mit einfach verständlichen Zeilen Animationen dieser Visionen selbst zu bauen. Smartboards in den Lehranstalten (siehe obige Zeitungsnotiz zum Jahr 2012), Smartphones, Facebook, Homepages lassen eine schnelle und weite Verbreitung zu.

Zwanzig Jahre nach dem Beweis des Jahrtausend-Resultats (Großer Fermatscher Satz) durch André Wiles wird es nun Zeit, die groen Weichenstellungen der Mathematik-Geschichte bzgl. der Lösung von Gleichungen aufzuspüren. Eine Kombination dieses Artikels mit Facebook erlaubt es, die zugehörigen Visions-Animationen parallel zum Text zu betrachten. Meine Facebook-Seite findet man, indem man über Google meinen Namen "Rolf-Peter Holzapfel" aufruft. Darüber hinaus kann auf gleichem Wege meine Homepage aufgesucht werden, um die zum Text gehörige Bildergalerie aufzurufen. Animationsclips und Bilder sind am Ende des Artikels als Referenz-Beginn aufgelistet. Die Bausätze der Clips findet man ebenfalls auf meiner Homepage. Es war etwas zeitaufwändig, sie aufzustellen. Wenn man sie aber einmal hat, kann man die Clips leicht selbst aufbauen und sie evtl. für eigene Zwecke verändern. Z.B. ist es empfehlenswert in den Bausatz des optische Verfahren der Lösungsdrohnen (Abschnitt 6) eine selbstgewählte Gleichung zu implementieren. Die Homepage-Baukästen sind somit eine gute Anleitung zum Aufbau neuer MAPLE-Bausteine für weitere Visionen. Damit wird auch ein spielerisches Eingreifen in Lernprozesse ermöglicht. Genau das wird in Zukunft gebraucht.

2 Conica

Gehen wir zurück in die Antike und betrachten einen Rotations- Doppelkegel. Er lässt sich leicht dynamisch auf dem Mathe-Notebook visualisieren. Nun betrachten wir Kegelschnitte mit Ebenen, die nicht durch die Kegelspitze gehen. Das älteste erhaltene Werk darüber stammt von Apollonius von Perge (ca. 262 - ca. 190 v.u.Z.). In seinem "Conica" findet man die Namen der Schnittfiguren: Ellipse, Parabel, Hyperbel. Die Animation [A10] zeigt die dreidimensionale Drehbewegung einer Ebene um eine fixierte Achse nebst den wandernden Schnitten mit einem (arretierten) Doppelkegel.

Die MAPLE-Bausteine verwenden selbstverständlich kartesische Koordinaten und damit einen historischen Vorgriff bis fast zum Beginn der Neuzeit der Mathematik, die mit Newton (1643-1727) und Leibniz (1646-1716) eingeläutet wurde. Ohne Koordinaten zu verwenden gelang im Jahre 1822 der nahe Paris geborene Germinal P. Dandelin (1794-1847) ein koordinatenfreier Beweis der Brennpunkt-Eigenschaften aller Kegelschnitt-Kurven [Da]. Er verwendete dazu den Kegelmantel und Schnittebenen berührende Kugeln (Dandelinsche Kugeln), [B4]. Zuerst fand ich als Student eine schöne Darstellung in [Bo], Abschnitt IX (Kegelschnitte). Damals fiel mir noch nicht auf, dass der Name Dandelin im gesamten Buch gar nicht erwähnt wurde. Das erinnert heute eindringlich an die damals von einflussreichen Kreisen nationalistisch geschürte "Erbfeindschaft" zweier Nationen, die in einen Weltkrieg mündete und sich nicht wiederholen darf.

Wir wollen vorausseilend noch einen Sprung ins 20. Jahrhundert vollführen, Der bedeutendste Mathematiker dieser Zeit, David Hilbert, beschreibt die praktische mechanische Verwendung zweier Hyperboloide (um Raumachse gedrehte Hyperbeln, siehe Animationen [A7],[A6],[A5]):

”Wir erhalten also eine Abschrotung dieser beiden Flächen, indem wir sie so aneinander legen, daß sie einander längs einer Geraden berühren, und sie dann beide um ihre Rotationsachsen in geeignetem Geschwindigkeitsverhältnis drehen. Hieraus ergibt sich eine technisch verwendbare Methode der Zahnradübertragung zwischen windschiefen Achsen. Da beim gegenseitigen Gleiten das Material leidet, muß man sich auf den Fall kongruenter Hyperboloide beschränken. Eine solche Übertragung ist in Abb. 269 dargestellt.”
 [HC], Kap. 5 (Kinematik), 43 (Bewegungen im Raum), Abb. 269 (mechanisches Modell mit Kurbel).

3 Kubische algebraische Gleichungen

Wir reduzieren nun die Anzahl der Unbestimmten auf eine einzige, lassen aber höhere Grade zu. Genauer gesagt wollen wir uns hauptsächlich mit algebraischen Gleichungen

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Q}, i = 0 \dots n - 1,$$

befassen. Bei quadratischen Polynomen stößt man bekanntlich schon auf solche, die man im reellen Zahlbereich nicht lösen kann:

$$\text{Eingabe : } \text{solve}(x^2 + 2px + q, x),$$

$$\text{Ausgabe : } -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

Schon in der Schule lernt man die Lösung/en kennen, falls $p^2 \geq q$ ist. Der entgegengesetzte Fall wird dort stillschweigend umgangen oder als ”nicht lösbar” bezeichnet. In der mathematischen Literatur zuerst nachweisbar erwähnt G. Cardano (1601-1676) in seinem Buch [Ca], ch. 39, eine der ”quantitas sophistica” (spitzfindige Größen), nämlich eine Lösung der Gleichung $x(10 - x) = 40$. Geometrisch bedeutet es, dass ein Rechteck mit Umfang 20 und Flächeninhalt 40 gesucht wird. Solch eines existiert gar nicht. Die Gleichung lässt sich nur mit Hilfe ”imaginärer Zahlen” lösen. Die Verwendung solcher Zahlen wurde allerdings von Cardano selbst als ”unnütze Spielerei” betrachtet (vgl. [FH]). Von René Descartes (1596-1650) wurde der Begriff der ”imaginären Wurzel” geprägt. Die Einführung der ”imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ ” als neue Zahl wird Leonhard Euler zugeschrieben (Google/Wikipedia: Komplexe Zahlen).

Dramatischer ging es bei der Suche nach Nullstellen kubischer Polynome

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

zu. Durch kubische Ergänzung sieht man schnell ein, dass man nur die Gleichungen der Form

$$x^3 + 3px - 2q = 0$$

zu beherrschen braucht. Wir schicken den weiteren Ergebnissen folgende Tafel voran:

Zeittafel II

- **Leonardo da Vinci**, lässt Bronzemenge für ein Reiterstandbild berechnen vom befreundeten Mathematiker, dem Franziskaner-Mönch Paccioli.
- **Pacioli**, behauptet $x^3 + bx + c = 0$ i.a. unlösbar; gibt explizite Beispiele.
- **del Ferro** (1500) löst all diese Beispiel-Gleichungen. Mitteilung des Lösungsweges an seinen Schüler **Fior**.
- **Tartaglia** (1535) behauptet auch, alles lösen zu können und demonstriert dies im Aufgabenwettbewerb mit Fior.
- **Cardano** läßt sich einweihen unter Versprechen der Geheimhaltung, bricht dies 1545 in seinem Buch "Ars magna".
- Öffentliches Streit-Duell Tartaglia - Cardano (vertreten durch seinen Schüler **Ferrari** und 2 Raufbolde).

Der Mathematiker und Franziskanermönch Luca Paccioli (1445 - 1514) war ein Freund von Leonardo da Vinci (1452 - 1519). Er berechnete zum Beispiel die Bronzemenge eines Reiterstandbildes für den Künstler. Nebenbei - aber zu seiner Zeit durchaus richtungsweisend - behauptete er, dass im allgemeinen kubische Gleichungen vom Typ

$$x^3 \pm bx + c = 0$$

nicht lösbar seien. Für seine Behauptung gab er Beispiele an. Kurz danach (um 1500) jedoch wurden Lösungen von Scipione del Ferro (1465 - 1526) gefunden. Laut Cardanos "Ars magna" besaß letzterer bereits einen Weg zur Lösung jeder kubischen Gleichung. Seinen Freunden teilte del Ferro diesen mit, darunter auch seinem Schüler Antonio Maria Fior (Ende 15. - Mitte 16. Jhdt.). 1535 kam es zu einem Wettstreit der beiden Rechenmeister Fior und Niccol Tartaglia (1499 o. 1500 - 1557). Ersterer legte letzterem 30 kubische Gleichungen vor, die überraschend alle von Tartaglia termingerech gelöst wurden. Nun sollte Tartaglia sein Rechengheimnis preisgeben. Das tat er auch nach vielen Bitten, nachdem Cardano feierlich schwor, dass er das Geheimnis streng bewahren würde. Tartaglia übergab den Lösungsansatz in nebligen Versen, die (frei interpretiert) folgende mathematische Anleitung enthielten:

$$x^3 + 3px = 2q, \quad y - z = 2q, \quad y \cdot z = p^3, \quad x = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z},$$

woraus sich

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} + q} - \sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} - q}$$

herleiten lässt. Cardano brach seinen Eid und veröffentlichte 1545 in seiner "Ars magna" die Lösungsmethode. Ein Jahr später beklagte Tartaglia in "Questiti et

inventione diverse" öffentlich den Wortbruch Cardanos. Im Gegenzug schickte Cardano seinen Schüler Ludovico Ferrari (1522 - 1565) vor, mit dem fälschlichen Vorwurf, dass Tartaglia auch nur von del Ferro abgekupfert hätte. Im Jahre 1548 kam es zu einem öffentlichen Streitgespräch gegen Ferrari, an dem sich Tartaglia beteiligte. Da Ferrari zu seinem Schutz mit einigen Raufbolden anrückte, blieb Tartaglia nichts weiter übrig, als sich gekränkt zurückzuziehen. Ferrari entdeckte etwas später, wie man eine algebraische Gleichung vierten Grades arithmetisch behandeln muss, um sie zu lösen. Er führte das Problem auf die Auflösung einer kubischen (Resolventen-) Gleichung zurück, siehe z.B. [QF], [MY].

Im Internet findet man schnell eine Reihe von Artikeln mit verschiedenen Lösungs-Anleitungen, z.B. auch Eulers Methode in [Ni].

4 Newtonsche Dynamisierung in der Ebene

Langsam entwickelte sich die Koordinaten-Methode bei der Behandlung geometrischer Probleme. Lesenswert ist das 1637 erschienene Buch "La Geometria" von René Descartes. Bereits 1627/28 zeigte Descartes in einer Skizze, dass die Lösung einer Gleichung vierten Grades auf den Schnitt einer Parabel mit einem Kreis zurückgeführt werden kann. Descartes ist der Erfinder der analytischen Geometrie, welche Algebra und Geometrie verbindet. Allerdings taucht nirgendwo in seinem Werk das heute nach ihm benannte, rechtwinklige (kartesische) Koordinatensystem auf, als dessen Erfinder mit größerem Recht Apollonios von Perge, Nikolaus von Oresme (1330-1382), Pierre de Fermat (1601-1665) und Jan de Witt (1625-1675) gelten können. Der Begriff "kartesisch" oder "kartesianisch" bedeutete ursprünglich: von Cartesius eingeführt. Kein geringerer als Isaac Newton (1643 - 1727) befasste sich in Anlehnung an die Gleichungen dritten Grades detaillierter mit ebenen kubischen Kurven. Er teilte sie in fünf Typen ein, die er - dynamischen Überlegungen folgend - von den Normalform-Gleichungen

$$(1) \quad y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$$

ablas. Eine deutschsprachige Beschreibung der Newtonschen Gedankenwelt findet man in [Wi], die wiederum der lateinischen Originalarbeit [Ne] von Isaac Newton entlehnt ist. Die Animation [A8] enthält die dynamische Veranschaulichung der kubischen Newton-Kurven. Mit Hilfe eines Bausatzes, der auf YouTube erscheinen wird, kann sie jeder Interessent selbst rekonstruieren. Als Grenzlage der glatten Kubiken sind zwei Grenzkurven mit je einer Singularität (Doppelpunkt bzw. Spitze) zu sehen. Links sind Kurven mit zwei Zusammenhangskomponenten (Oval und Ast) zu sehen. Die Kurven auf der rechten Seite von [A8] haben nur eine Zusammenhangskomponente.

Descartes (auch schon Albert Girard, 1595 - 1632) begann Polynome in Produkte linearer Faktoren zu zerlegen. Arithmetisch konnten nun die verschiedenen Typen durch die Nullstellen-Anordnung des kubischen Polynoms gedeutet

werden. Geometrisch erscheinen die Nullstellen als Schnittpunkte der Kurven (1) mit der x -Achse.

5 Quartik-Beispiele: Fermat-Kurve und Ei des Kolumbus

Erhöhung des Grades um 1 führt uns in die Welt der ebenen Quartiken. Wir betrachten dazu nur zwei Beispiele, nämlich die Fermat-Quartik (weiter unten) und das "Ovoid" [A3], welches durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - x^3 = 0,$$

gegeben ist ([Fi], S. 32). Im Bausatz wird die Kurve gezeichnet, anschließend im Raum gedreht. Dazu ist die Auflösung der Gleichung nach y vonnöten. Der Drehbefehl braucht nämlich eine Funktionskurve. Mit dem Mathe-Notebook finden wir:

Eingabe : `solve((x^2 + y^2)^2 - x^3, y),`

Ausgabe : `sqrt(-x^2 + x^3/2), -sqrt(-x^2 + x^3/2), sqrt(-x^2 - x^3/2), -sqrt(-x^2 - x^3/2)`

Wir wählen die Funktion $\sqrt{-x^2 + x^3/2}$ im Intervall $[-1,0]$ aus. Nach der Drehung der Funktionskurve wird das entstandene Ei gefärbt, beleuchtet und an der Spitze beschnitten. Am Ende kann man die dynamische Version "Ei des Kolumbus" [A3] betrachten.

Uns interessiert noch die Lösbarkeit der Gleichung im Bereich der rationalen Zahlen. Im allgemeinen hat eine ebene Gleichung vierten Grades nur endlich viele \mathbb{Q} -Lösungen. Das geht aus dem Satz von Faltings aus dem Jahre 1983 hervor: Glatte Kurven vom Geschlecht $g > 1$, definiert durch Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, haben nur endlich viele rationale Punkte. Seit dem 19. Jahrhundert weiß man, dass fast alle Kurven vom Grad 4 das Geschlecht 3 haben, denn fast alle sind glatt (singularitätenfrei), und für diese gilt $g = 3$.

Gerd Faltings erhielt für sein Resultat die Fields-Medaille. Das ist die höchste mathematische Auszeichnung, vergleichbar mit dem Nobelpreis, der für die Mathematik leider nicht vorgesehen ist. Die Vermutung wurde schon 1922 vom britischen Mathematiker (geb. in USA) Louis J. Mordell (1888-1972) ausgesprochen. In der arithmetischen und algebraischen Geometrie wurden auf internationaler Ebene weitreichende neue Methoden entwickelt, die letztendlich den Beweis der Mordell-Vermutung ermöglichten, siehe Kap. 12, Schluss-Bemerkung. Wir prüfen noch, ob auch die Ovoid-Gleichung nur endlich viele Lösungen mit rationalen Koordinaten x,y hat. Zunächst wird festgestellt, dass die Kurve gar nicht glatt ist:

Eingabe : `f := x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^3, singularities(f, x, y)`

Ausgabe : `(0,0)`

Also sitzt im Koordinatenursprung (und nur dort) eine Singularität. Die Geschlechtsprüfung erfolgt über

Eingabe : $\text{genus}(f, x, y)$

Ausgabe : 0

Nun erhält man folgende Parametrisierung der Kurve:

Eingabe : $\text{parametrization}(f, x, y, t)$

Ausgabe : $\left(\frac{1}{1 + 2 \cdot t^2 + t^4}, \frac{t}{1 + 2 \cdot t^2 + t^4} \right)$

Die rationalen Punkte (s. Ausgabe) liegen dicht auf dem Ovoid.

Im Gegensatz zum Ovoid ist die Fermat-Kurve $x^4 + y^4 = 1$ [B3] glatt, vom Geschlecht 3, hat daher nach Faltings nur endlich viele \mathbb{Q} -rationale Punkte. Schon Fermat (1601-1665) kannte alle davon, nämlich $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$, siehe Abschnitt 9.

6 Der Lösungs-Navigator

Wir beginnen den Abschnitt mit folgender

Zeittafel III

- 1895 **H.Weber**, Erste Lehrbuch-Präsentation einer radikal² unlösbaren Gleichung: $x^5 + 5x + 5 = 0$.
- 1783 **L.Euler**: Überzeugt - bis an's Lebensende - von radikaler Lösbarkeit aller Gleichungen 5. Grades mit Hilfe geeigneter Resolventen.
- 1799 **P.Ruffini**: Behauptet Existenz radikal unlösbarer Gleichungen 5. Grades. Seine Publikation dazu enthält Unklarheiten, wird daher mit Recht nicht von den um 1800 führenden Mathematikern akzeptiert.
- 1799 **C.F.Gauß** (Dissertation): Alle (nichtkonstanten) Polynomgleichungen sind mit Hilfe imaginärer Zahlen lösbar.
- 1824 **N.H.Abel**: Liefert exakten Beweis der Existenz radikal unlösbarer Gleichungen 5. Grades.
- 1832 **E. Galois**: Findet präzises Kriterium für radikale Un/Lösbarkeit, anwendbar auf jede algebraischen Gleichung. Das war gleichzeitig die Geburtsstunde der Gruppentheorie.

²Als "Radikale" einer polynomialen Gleichung bezeichnet man Zahlen, die sich aus den Koeffizienten des Polynoms mit Hilfe der vier Grundrechenarten und (beliebig hohen) Wurzeln ausdrücken lassen. "Radikal (un)lösbar" heißt: (nicht) mit Hilfe von Radikalen der Gleichung lösbar.

Wie schon in der Zeittafel I erwähnt, reichte Carl-Friedrich Gauß (1777 - 1855) seine Doktorarbeit [GD] im Jahre 1799 ein. Nicht nur das Ergebnis war ein Paukenschlag in der Entwicklung der Mathematik, sondern auch die kreative arithmetisch-geometrische Verwendung der damals allgemein geächteten imaginären Zahlen. Sie waren notwendig, denn zur Lösbarkeit der Gleichungen musste man sich im Bereich $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot i$ aller komplexen Zahlen bewegen. Formuliert wurde der Fundamentalsatz in der Gaußschen Dissertation vorsichtigshalber als Zerlegungssatz für reelle Polynome in das Produkt linearer und quadratischer reeller Polynom- Faktoren.

Erst 1931 führte Gauß in seiner Arbeit über das biquadratische Reziprozitätsgesetz die Bezeichnung "komplexe Zahlen" ein mit genauer arithmetisch-geometrischer Beschreibung. Rückblickend bemerkte er dazu (Werke 10, No.1): "Bei alle dem sind die imaginären Größen, solange ihre Grundlage immer nur in einer Fiction bestand, in der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert, als vielmehr nur wie geduldet betrachtet, und weit davon entfernt geblieben, mit den reellen Größen auf gleiche Linie gestellt zu werden. Zu einer solchen Zurücksetzung ist aber jetzt kein Grund mehr, nachdem die Methaphysik der imaginären Größen in ihr wahres Licht gesetzt. und nachgewiesen ist, daß diese, ebenso gut wie die negative, ihre reale gegenständliche Bedeutung haben."

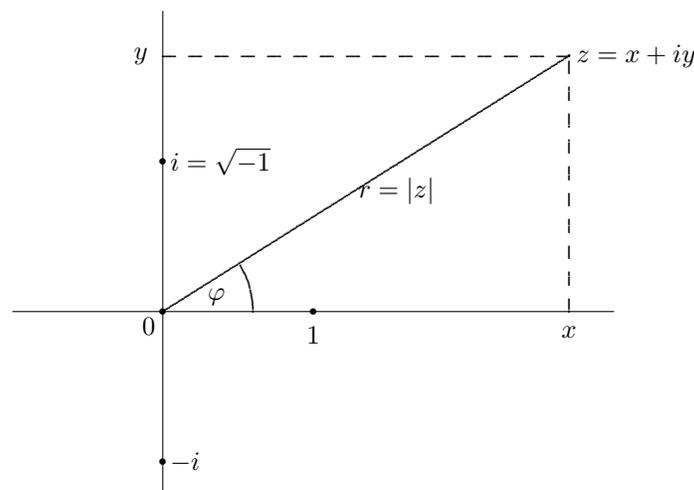
Durch die geometrische Interpretation als ebene Vektoren waren die komplexen Zahlen der bereits gut entwickelten analytischen Geometrie - und damit der Behandlung mit kartesischen Koordinaten und trigonometrischen Funktionen - zugänglich. Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen für Polar- und kartesische Koordinaten für $z = x + yi \in \mathbb{C}$:

Polarkoordinaten :

Absolutbetrag $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, Argument $\varphi = \arg(z) = \arcsin(x/|z|)$,

kartesische Koordinaten :

Realteil $x = \operatorname{Re}(z) = r \cdot \cos(\varphi)$, Imaginärteil $y = \operatorname{Im}(z) = r \cdot \sin(\varphi)$.



Wir wollen nun für die algebraischen Gleichungen einen Lösungs-Navigator basteln, der die Nullstellen desselben sichtbar aufspürt und uns ihre Daten - genauer deren Polarkoordinaten - explizit mitteilt. Sei dazu $P(z)$ ein Polynom vom Grade $d > 0$ mit rationalen Koeffizienten. Es vermittelt eine Abbildung $z \mapsto P(z)$ von der (Gaußschen) z -Ebene in die Bildebene.

Wir lassen zur Einstiegs-Orientierung eine Welle von Kreisen $|z| = r$ mit wachsendem Radius r über den Bildschirm laufen. Dann sehen wir uns die Bildwelle (Radius-Welle) nach Anwendung des Polynoms an. Sie durchquert mehrmals den Nullpunkt, und zwar d mal. Wir stoppen die Radius-Welle, wenn sie durch 0 geht. Der Zähler (Ticker) zeigt uns den Urbildradius an. Nun haben wir eine Route eines Radius ρ , den wir notieren. Auf die Radius-Route setzen wir eine Nullstellen-Drohne und bewegen sie vom Startpunkt $P(\rho)$ entlang der Route zum Zielpunkt 0. Diesmal zeigt der Zähler/Ticker eine Zahl φ an. Das Paar (ρ, φ) ist eine der gesuchten Nullstellen des Polynoms in Polarkoordinaten mit φ im Bogenmaß. Die Genauigkeit kann durch einen "Näherungs-Befehl" verbessert werden. Vielleicht hat Gauß dieselbe dynamische Vorstellung im Kopf gehabt, als er seinen Beweis fand. Wie auch bei anderen seiner berühmten Ergebnisse hielt er den Weg dorthin im Verborgenen. Im Gaußschen Tagebuch findet man den Eintrag No. 80 (Braunschweig, Okt. 1797, [GT]): "Es ist durch eine natürliche Methode bewiesen worden, dass Gleichungen imaginäre Wurzeln haben."

Auf einen Schlag kann man den obige Beweis des Fundamentalsatzes nun von den vier Animationen in [A9] ablesen, und zwar anhand des obigen Beispiels von H. Weber (1843-1913). Optisch gelingt die Annäherung mit letzteren bis auf ein Hundertstel in Polarkoordinaten (r, φ) mit φ im Bogenmaß :

$$\begin{aligned} z_1 &= (0.89, -\pi) \\ z_2 &= (1.43, 2.18) \\ z_3 &= (1.655, 0.72) \\ z_4 &= (1.43, -2.18) \\ z_5 &= (1.655, -0.72) \end{aligned}$$

Mit den Befehlen $Newton(x^5 + 5x + 5, z_i, 9), i = 1..5$ wird die Genauigkeit sofort auf ein Milliardstel $= \frac{1}{10^9}$ verbessert. Die Umrechnung in Gaußsche Zahlen liefert:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -0.8889660370 \\ \zeta_2 &= -0.8026283841 + 1.185081859i \\ \zeta_3 &= -0.8026283841 - 1.185081859i \\ \zeta_4 &= +1.247111403 + 1.090967675i \\ \zeta_5 &= +1.247111403 - 1.090967675i \end{aligned}$$

Schneller kommt man mit einem Bild der Betragsfläche der Polynom-Funktion zum Ziel, siehe [A10]. Die dortigen Zapfen zeigen auf die Nullstellen in der Gaußschen Zahlenebene. Hier fehlt allerdings die Präzision, die mit den Lösungs-drohnen erreicht wird.

Dem Leser wird empfohlen, den Lösungsnavigator (Routen-Finder + Drohen) auf das Polynom

$$P(z) = z^6 - 4z^5 + 2z^4 + 22z^3 - 89z^2 + 126z - 90$$

anzuwenden. Es wird verraten, dass hier alle Nullstellen ganzzahlig sind (d.h. in $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot i$ liegen) und damit auch durch den Faktorisierungs- Befehl für Polynome ermittelt werden können.

7 Ein Blick zur Galois-Theorie

Bis zum Grad 4 können die Nullstellen aller Polynome mit rationalen Koeffizienten durch die vier Grundrechenarten und Wurzelziehen ausgedrückt werden (Radikale). Für höhere Polynom-Grade ist das im allgemeinen nicht möglich. Dass es Polynome fünften Grades gibt, die nicht durch Radikale lösbar sind, wurde Anfang des 19. Jahrhunderts vom jungen norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802 - 1829) bewiesen. Er setzte das Polynom 5. Grades mit unbestimmten Nullstellen an und kam zu dem Schluss, dass eine zufällig gewählte Polynom-Gleichung fünften Grades nicht durch Radikale gelöst werden kann [Ab]. Das ist ein Existenzsatz für Polynome ohne Radikal-Nullstelle. Man kann sich bei Auswahl eines irreduziblen Polynoms allerdings nicht sicher sein, ob es eine Radikal-Nullstelle hat oder nicht. Dazu wird ein Entscheidungskriterium benötigt. Das wurde von E. Galois entwickelt (s. unten).

Das Leben von Abel endete tragisch schon im Alter von knapp 27 Jahren. Infolge intensiver wissenschaftlicher Arbeit bei entbehrungsreichem Leben in Armut verfiel sein Körper mehr und mehr in seinem letzten Lebensjahr. Bis dahin fanden seine Ergebnisse bereits höchste Anerkennung u.a. bei C.G. Jacobi (1804-1851), Legendre (1752-1833) und Gauß. Energische Unterstützung erhielt er von A.L. Crelle (1780-1855). Zwei Tage nach dem Tod von Abel hielt Crelle die Berufungszusage für den jungen norwegischen Mathematiker zum Lehrstuhl an der Berliner Universität (heute Humboldt-Universität) in den Händen. Sie kam zu spät für eines der bedeutendsten mathematischen Genies der Weltgeschichte, siehe [Wu], 357-365.

Der ebenso begabte französische Mathematiker Evariste Galois (1811 - 1832) fand im Anschluss an Abels Werk ein notwendig und hinreichendes Auflösbarkeits-Kriterium für alle Polynome. Er betrachtete Substitutionen der abstrakten Nullstellen eines Polynoms untereinander und entdeckte die algebraische Struktur, die darin steckt. Sie wurde später nach seinem frühen Tod "Gruppe" genannt, genauer "Galois-Gruppe" im betrachteten Falle. Es war die Geburt der Gruppentheorie, die heute in vielen Zweigen der Mathematik erfolgreich verwendet wird.

Satz 1 (Galois). *Ein irreduzibles Polynom ist auflösbar genau dann, wenn die zugehörige Galois-Gruppe auflösbar ist.*

Dabei wird ein (irreduzibles) Polynom "auflösbar" genannt, wenn alle Nullstellen Radikale desselben sind. Den Auflösbarkeits-Begriff für Gruppen findet

man in jedem Gruppen-Lehrbuch (siehe auch Google/Wikipedia).

Ebenso tragisch, wie schon zuvor für Abel, endete das Leben von Galois. Durch den Freitod seines Vaters, in den dieser durch politische Umstände getrieben wurde, nahm Evariste an Demonstrationen gegen König Louis Philippe teil. Sein provokatives Auftreten wurde vom Geheimdienst registriert. Über eine Dirne wurde er in ein Duell verwickelt, das er nicht überlebte. In der Nacht davor schrieb er seine letzten mathematischen Resultate auf. Dieses Manuskript ist noch heute als "Mathematisches Testament" in Mathematikerkreisen weltbekannt. Galois wurde nur 20 Jahre alt. Der Physiker Leopold Infeld - zeitweiliger Kollege Albert Einsteins - schrieb die Galois-Biographie [In], die einen tiefen Einblick in die damalige Schulpädagogik, eingebettet in die politischen Zeitumstände, gibt.

Einfach gebaute Polynome zu finden, deren Galoisgruppen nicht auflösbar sind, ist keineswegs eine simple Aufgabe. Bei Issai Schur (1875-1941) findet man das Polynom

$$(2) \quad Q = 5! \cdot \sum_{k=0}^5 \frac{x^k}{k!} = x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120$$

mit der nichtauflösbaren Galoisgruppe S_5 (Permutationsgruppe von fünf Elementen), siehe Russische Enzyklopädie [ME], I, S. 849. Man sieht sofort, dass es sich bei Q um ein irreduzibles Polynom handelt, denn das für die Primzahl $p = 5$ ist das Eisenstein-Kriterium erfüllt: p teilt - außer dem höchsten - alle Koeffizienten, aber p^2 teilt nicht das konstante Glied. Aus Algebra- und Zahlentheorie-Vorlesungen ist bekannt, dass Eisenstein-Polynome irreduzibel sind. Auch das Weber-Polynom im Vorwort erfüllt offensichtlich das Eisensteinsche Irreduzibilitäts-Kriterium. Einen schnellen Einstieg in die Galois-Theorie, insbesondere zur Aufstellung der Galois-Gruppe eines irreduziblen Polynoms, findet man in [MG] von M.S. Milne. Im Anhang A-35 wird dort das formal einfache Beispiel $X^5 - 6X^4 + 3$ mit Galois-Gruppe S_5 angegeben. Dem Leser wird empfohlen, die Nullstellen mit Hilfe des Lösungs-Navigators zu bestimmen.

Es ist ein noch ungelöstes Problem, immer ein Polynom mit rationalen Koeffizienten zu finden, dessen Galoisgruppe vorgegeben ist - oder auch nur die Existenz nachzuweisen. An diesem *Umkehrproblem der Galois-Theorie* wird weiter gearbeitet. Für spezielle Gruppentypen bzw. spezielle Grundkörper wurde es gelöst.

Zum aktuellen arithmetisch-geometrischen Stand in der Galois-Theorie verweisen wir auf den gerade erschienenen Sammelband [AG].

8 Vom komplexen Logarithmus zur Riemannschen Fläche

Eine historischen Spur zu dynamischen Elementen des Beweises des Großen Fermatschen Satzes durch Andrew Wiles am Ende des vorigen Jahrhunderts führte mich zu Leonhard Eulers Analyse des Logarithmus im Komplexen. Die

Exponentialfunktion ist durch Fortsetzung der bekannten Reihenentwicklung ins Komplexe - zusammen mit einfachen Konvergenzbetrachtungen - erklärt:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Die vertraute Reihenentwicklung des (natürlichen) Logarithmus hingegen konvergiert im Reellen nur für absolut kleine Argumente:

$$\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$$

Die Fortsetzung ins Komplexe war mit einigen Geburtswehen verbunden. Leonhard Euler schreibt in [Eu], Kap. II:

”Obgleich die Lehre von den Logarithmen so fest gegründet ist, dass die in ihr enthaltenen Wahrheiten ebenso streng bewiesen zu sein scheinen wie die der Geometrie, sind die Mathematiker dennoch sehr unterschiedlicher Auffassung über die Natur der Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen.”

Besonderen Anlass zu dieser Bemerkung gab der Versuch von bekannten Mathematikern, den Logarithmus negativer und rein imaginärer (ganzer) Zahlen zu bestimmen. Bernoulli (Johann, 1667-1748) behauptete, dass $\ln(-a) = \ln(a)$ für die reellen Zahlen a gelten müsse. Er gab im Briefwechsel mit Leibniz gewichtige Argumente dafür an. Leibniz hingegen vertrat in dem Disput die Meinung, dass die Logarithmen negativer Zahlen imaginär sein müssten. Die obige Reihe ist für $x = -2$ offenbar divergent. Es war deswegen schon etwas kühn, sich an die Lösung der Gleichung

$$e^y = -1$$

zu wagen, um damit einen Wert $y = \ln(-1)$ zu ermitteln. Erst 35 Jahre nach dem Briefwechsel klärte Leonhard Euler (1707-1783) die Situation. Er führte zunächst vier Beweisgründe für Bernoullis Behauptung an und drei für die Leibnizsche Auffassung. Anschließend setzte er sechs bzw. drei Einwände dagegen, um dann folgenden Satz zu formulieren und zu beweisen:

Satz 2 (Euler, 1747, [Eu], II). *Es gibt immer eine unendliche Anzahl von Logarithmen, die in gleicher Weise jeder gegebenen Zahl entsprechen, oder anders ausgedrückt, wenn der Logarithmus der Zahl x mit y bezeichnet wird, dann behaupte ich, dass y eine unendliche Anzahl von verschiedenen Werten einschließt.*

Am Ende des Aufsatzes [EK] findet man die Formel

$$e^{f+g\sqrt{-1}} = e^f \cdot e^{g\sqrt{-1}} = e^f \cdot (\cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g)$$

(mit reellen Zahlen f, g), von der die trigonometrische Periodizität der komplexen Exponentialfunktion ablesbar ist. Wir visualisieren diesen Zusammenhang anhand einer unendlichen Sprungfeder. Letztere soll die zur Spirale gedrehte imaginäre Achse verkörpern. Die Exponentialabbildung wird nun als Animation dargestellt, die die Feder auf den Einheitskreis der (komplexen) Bildebene zusammendrückt.

Der obige Satz blieb für die meisten Mathematiker des 18./19. Jahrhundert zu undurchsichtig, um imaginäre Zahlen zu akzeptieren. Erst ab Mitte des 19. Jahrhunderts setzte sich ein breiteres Verständnis der imaginären Größen durch. Mehrdeutige Funktionen wurden mit der Konstruktion "Riemannscher Flächen" besser verstanden. Die Spirale veranschaulicht den späteren Gebrauch solcher Flächen: Zur Veranschaulichung verbreitert man die Spirale zu einer Wendeltreppe. Wollen wir von einem Logarithmuswert zum anderen desselben Arguments gelangen, brauchen wir uns nur längs der Spirale auf der Wendeltreppe nach oben (oder unten) zu bewegen, siehe Animation [A4].

Der Logarithmus lässt sich entlang jedes Bogens stückweise eindeutig fortsetzen. Die Werte sind allerdings abhängig von der Zahl der durchlaufenen Windungen. Dieses Prinzip der *analytischen Fortsetzung* wird *Monodromie* genannt und auch auf andere lokal definierte Funktionen zur multiwertigen Globalisierung angewandt.

Auf Eulers Pionierarbeit zum Logarithmus baute sich die moderne komplexe Analysis rund um so wesentliche Begriffe wie Fundamentalgruppen, universelle Überlagerungen, Fundamentalbereiche auf. Beim Logarithmus erscheint $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ als universelle Überlagerungs-Abbildung von \mathbb{C}^* . Mit anderen Worten: Die gesamte komplexe Ebene ist also die universelle Überlagerung der punktierten Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Fundamentalgruppe ist \mathbb{Z} . Sie misst die Mehrdeutigkeit der Umkehrfunktion. Als einprägsames Beispiel eines reell-eindimensionalen Fundamentalbereiches (Fundamentalbogen) der auf die Spirale eingeschränkten Exponential-Abbildung dient jeder volle Windungsbogen der Spirale. Die halboffene Windung wird bijektiv auf den exp-Bildkreis der Spirale projiziert, [A4].

9 Numerische Vorgeschichte zum Fermatschen Satz

Satz von Wiles 3 (*Großer Fermatscher Satz, Fermatsche Vermutung*). *Es ist unmöglich, drei ganze Zahlen $a, b, c \neq 0$ und eine natürliche Zahl $n > 2$ zu finden, so dass*

$$a^n + b^n = c^n.$$

Generationen von Mathematikern bissen sich über 360 Jahre lang vergeblich die Zähne daran aus, einen Beweis zu finden. Fermat selbst gelang der Beweis nur für den Exponenten $n = 4$ durch die von ihm erfundene Methode des unendlichen Abstiegs: Wenn ein positives Lösungstriple a, b, c existiert, so kann man daraus ein echt kleineres (positives) Lösungstriple konstruieren. Der Widerspruch zur Annahme der Existenz einer Lösung ist offensichtlich. Geometrisch betrachtet hat damit die ebene Kurve

$$x^4 + y^4 = 1$$

keine rationalen Punkte, außer der trivialen $(0, 1), (1, 0)$.

Den Fall $n = 3$ behandelte L. Euler erfolgreich (um 1770). P.G.L. Dirichlet (1805-1859) und A. M. Legendre bestätigten die Fermatsche Vermutung für $n = 5$ (1825). Beide stützten sich auf Vorarbeiten der französischen Mathematikerin Sophie Germain (1776-1831), die einen simultanen Ansatz für unendlich viele spezielle Exponenten n verfolgte, siehe [Si] ab S. 128. Mit seinem konzeptionellen Herangehen stellte E.E. Kummer (1810-1893) wichtige Weichen zur Weiterentwicklung der Zahlentheorie. Auf einen Schlag bewies er die Vermutung für alle Primzahl-Exponenten $5 \leq n = p \leq 43$, $p \neq 37$. Computereinsatz im 20. Jahrhundert trieb am Ende (1993) die Bestätigung bis zu $n = 4000000$ hoch, siehe [BCEM].

10 Nichteuklidische Vorbereitungen

Nun gehen wir noch einmal zurück zu Newton und Gauß. In einer kubischen Gleichung werden jetzt komplexe Zahlen zugelassen. Das Nullstellengebilde ist eine reelle Fläche $E_{\mathbb{C}}$ mit komplexer Struktur, die wir (*komplexe*) *elliptische Kurve* nennen, falls keine Singularität auftritt. Bei geeigneter (glatter) Einbettung in den dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 erscheint $E_{\mathbb{C}}$ als ein Torus. Die universelle Überlagerung ist die komplexe Ebene \mathbb{C} . Mit Hilfe explizit konstruierter doppelt periodischer komplexer Funktionen (elliptische) wird die Überlagerung als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ konstruiert. Fundamentalbereich in \mathbb{C} ist ein Parallelogramm F . Zwei aufspannende Seiten von F sind die Perioden der überlagernden Funktion. Durch Verschiebungen von F in den zwei Seiten-Richtungen kann die gesamte komplexe Zahlenebene \mathbb{C} mit denselben Parallelogrammen an- und untereinander gereiht überdeckt werden. Die Verschiebungen bilden eine unendliche Gruppe, die Gruppe der Decktransformationen genannt wird. Sie ist isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sie wird auch Fundamentalgruppe der Überlagerung genannt.

Anschaulich kann man T aus F in zwei Schritten gewinnen: Zuerst führt man zwei gegenüberliegende Seiten von F zusammen, so dass ein Zylinder entsteht. Nun verbiegt man diesen, um die beiden Öffnungen zu schließen, wobei der Schlauch (Torus) entsteht, siehe Bilder in [A2].

Bevor wir zur nichteuklidischen Geometrie übergehen, wollen wir an dieser Stelle an den Weitblick von Gauß erinnern. In einem Brief an Schumacher (siehe [GS]) schreibt er am 17. September 1808:

”Mir ist bei der Integralrechnung immer das weit weniger interessant gewesen, wo es nur auf Substitutionen, Transformiren etc. kurz auf einen geschickt zu handhabenden Mechanismus ankommt, um Integrale auf algebraische oder Logarithmische oder Kreisfunktionen zu reduciren, als gewisse tiefere Betrachtung solcher Transcendenten Functionen, die sich auf jene nicht zurückführen lassen. Mit Kreisfunktionen und Logarithmischen wissen wir jetzt umzugehen, wie mit dem 1 mal 1, aber die herrliche Goldgrube, die das Innere der höheren Functionen enthält, ist noch fast ganz Terra Incognita. Ich habe darüber ehemals sehr viel gearbeitet und werde dereinst ein eigenes großes Werk darüber geben, wovon ich bereits in meinen Disquiss. arithm. p. 593, Art. 335, einen

Wink gegeben habe. Man geräth in Erstaunen über den überschwenglichen Reichthum an neuen höchst interessanten Wahrheiten und Relationen, die dergleichen Functionen darbieten (wohin u.a. auch diejenigen gehören, mit denen die Rectification der Ellipse und Hyperbel zusammenhängt)."

Das angekündigte große Werk entwickelte sich zu einer unendlichen Geschichte. Daran zu arbeiten blieb Generationen von Mathematikern des 19. und 20. Jahrhunderts vorbehalten. Wir registrieren hier nur die enorme Schubkraft, die das Wirken von Gauß in den obigen Briefzeilen offenbarte.

Im 19. Jahrhundert wurde auch die nichteuklidische Geometrie entdeckt, woran auch Gauß einen wesentlichen Anteil hatte. Betrachten wir zunächst die folgende "modulare Figur" (siehe [B1]): Sie besteht aus unendlich vielen bogengrenzten Dreiecken innerhalb des Einheitskreises, die zum Rand immer kleiner werden. In der hyperbolischen Geometrie der (Einheits-)Kreisscheibe \mathbb{D} sind diese jedoch gleich groß. Wieder gibt es eine Gruppe von Decktransformationen, die jedes Dreieck in ein beliebiges anderes überführt. Es handelt sich um nichteuklidische Isometrien des Kreises in sich. In ihrer Gesamtheit haben wir es mit der unimodularen Gruppe

$$Sl_2(\mathbb{Z}) = \{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det(\gamma) = 1 \}$$

zu tun. Man kann leicht Untergruppen Γ endlichen Indexes finden, die - für eine geeignete natürliche Zahl r - als Fundamentalgruppe einer r -fach punktierten komplexen elliptischen Kurve $E_{\mathbb{C}}^* = E_{\mathbb{C}} \setminus \{r \text{ Punkte}\}$ fungiert. Fundamentalbereich der Überlagerungsabbildung ist dann ein Vieleck in \mathbb{D} , das von $[Sl_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ Dreiecken der modularen Figur gefüllt wird (o.B.d.A. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$).

Eine wichtige Rolle spielen - für natürliche Zahlen $N > 0$ - die (speziellen Kongruenz-)Untergruppen der unimodularen Gruppe

$$\Gamma_0(N) = \{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}), c \equiv 0 \pmod{N} \}.$$

Die Elemente wirken auf die Kreisscheibe \mathbb{D} als gebrochen lineare Transformationen. Die (nichtkompakte) Riemannsche (Quotienten-) Fläche $X_0^*(N) := \mathbb{D}/\Gamma_0(N)$ hat die Quotientenabbildung $\mathbb{D} \rightarrow X_0^*(N)$ als universelle Überlagerung. Durch Hinzufügen endlich vieler Punkte (Kompaktifizierung) erhält man die kompakte Riemannsche Fläche $X_0(N)_{\mathbb{C}}$. Anschaulich ist es eine Multi-Brezel, also eine "Brezel" mit $g = g(N) \geq 0$ Löchern. Dazu gehören auch die Tori ($g = 1$) und die Riemannsche Zahlenkugel ($g = 0$). In Phantasie bricht man ein zusammenhängendes Feld F von endlich vielen Dreiecken aus unserer modularen Disk-Triangulierung heraus und biegt diese zu einer Fläche mit ein paar Löchern zusammen. In [Sh], IX, 3.3, wird an die klassische Konstruktion anschaulich erinnert, mit besonderem Augenmerk auf die Entstehung der Löcher. Unabhängig von unserer Vorstellungskraft werden die universellen Überlagerungen $\mathbb{D} \rightarrow X_0^*(N)$ durch spezielle F -periodische komplex-analytische Funktionen auf \mathbb{D} realisiert, die *Modulfunktionen* genannt werden. Das Dreiecksfeld F ist dann ein Fundamentalbereich dieser Abbildung, auf dem bereits alle Werte angenommen werden.

11 Sprung ins 20. Jahrhundert

Schon bei der Exponentialfunktion fällt die (elementar) zahlentheoretische Beschreibbarkeit der Reihenkoeffizienten auf. Nun eröffnet sich eine große Spielweise bei den Reihenentwicklungen der einfach periodischen Modulfunktionen. Leopold Kronecker (1823-1891) erlebt seinen "liebsten Jugendtraum", der eine tiefe Verflechtung von Funktionentheorie und Zahlentheorie herstellt. Dieser wird von David Hilbert (1862-1943) aufgegriffen und in seinem berühmten Problemvortrag in Paris im Jahre 1900 zusammen mit einem weitreichenden Verallgemeinerungsversuch dem internationalen Mathematiker-Publikum vorgestellt. Am Ende des 12. Hilbertschen Problems heißt es:

"Wie wir sehen treten in dem eben gezeichnetem Problem die drei grundlegenden Disziplinen der Mathematik, nämlich Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie in die innigste gegenseitige Berührung, und ich bin sicher, daß insbesondere die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Variablen eine wesentliche Bereicherung erfahren würde, wenn es gelänge, diejenigen Funktionen aufzufinden und zu diskutieren, die für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper die entsprechende Rolle spielen, wie die Exponentialfunktion für den Körper der rationalen Zahlen und die elliptische Modulfunktion für den imaginären quadratischen Zahlkörper."

Ein Jahrhundert lang wurde die Weiterentwicklung der Mathematik von den Hilbertschen Problemen intensiv beeinflusst. Im wesentlichen wurde das Jugendtraum-Problem in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts geklärt. Nach dem zweiten Weltkrieg unternahmen die japanischen Mathematiker G. Shimura (geb. 1930) und Y. Taniyama (1927-1958) einen beachtlichen Vorstoß in die höhere Dimension. Noch im Vorwort ihres bekannten Buches [ST] gaben sie das zwölfte Hilbertsche Problem als ihren Leitstern an, obwohl es keine geschlossene Lösung des höherdimensionalen zweiten Teils geben kann. Wir haben es mit einer übergreifenden Erweiterung der Gaußschen unendlichen Geschichte zu tun. Ihr rang Taniyama eine für das Fermatsche Problem folgenschwere Vermutung ab.

12 Die große Verschmelzung

Taniyama-Vermutung, Modularitätssatz 4 (1956, z.B. [MF], 11.22, p.112). Sei E elliptische Kurve über \mathbb{Q} mit geometrischem Konduktor³ N . Dann ist E modular der Stufe N , d.h. es existiert eine nichtkonstante rationale Abbildung $X_0(N) \rightarrow E$.

E/\mathbb{Q} (lies: E über \mathbb{Q}) wird als Abkürzung dafür verwandt, dass E durch eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten definiert ist. Die Rationalität der Abbildung drückt den Umstand aus, dass sie algebraisch mit Hilfe von Polynomen mit rationalen Koeffizienten beschrieben werden kann.

³Der geometrische Konduktor einer elliptischen Kurve E/\mathbb{Q} ist eine quadratfreie natürliche Zahl. Die genauere allgemeine Definition (s. z.B. [MG]) wird hier nicht benötigt.

Zur Veranschaulichung betrachten wir die Komplexifizierung $X_0(N)_\mathbb{C} \rightarrow E_\mathbb{C}$ der rationalen Abbildung. Es handelt sich um eine endliche Überlagerung Riemannscher Flächen. Wir rufen uns nun den triangulierten Torus ins Gedächtnis zurück. Die Fläche $X_0(N)_\mathbb{C}$ ist nämlich Bild des nichteuklidischen Einheitskreises. Entlang der komplex-analytischen Komposition $\mathbb{D} \rightarrow X_0(N)_\mathbb{C} \rightarrow E_\mathbb{C}$ wird das nichteuklidische Triangulierungsnetz via $X_0(N)_\mathbb{C}$ als Zwischenstation auf den Torus $E_\mathbb{C}$ projiziert. Mit [B2] haben wir eine grobe geometrische Vorstellung zur Taniyama-Vermutung. Um die nichteuklidische Struktur auf den elliptischen Kurven (Tori) der Taniyama-Vermutung zu verinnerlichen, gehen wir auf die populäre Erklärung der Relativitätstheorie zur Lebzeiten von Jules Verne zurück: Man stelle sich auf \mathbb{D} eine Temperaturverteilung vor, die im Mittelpunkt der Kreisscheibe am wärmsten ist, und zum Rand bis zum absolut minimalen Kältegrad 0 (Kelvin) abnimmt. Diese Temperaturverteilung wird nun auf den triangulierten Torus projiziert, indem man sie von unserem fundamentalen Dreiecksfeld F übernimmt. Jetzt verfügen wir über eine ortsabhängige/-veränderliche Messung auf dem trianguliertem Torus. In einigen Dreiecks- Eckpunkte herrscht dann absolute Kälte.

Über Jahrzehnte wurde versucht, diese Vermutung zu beweisen. Es gelang nur für Spezialfälle. Das Interesse ließ nach bis Gerhard Frey einen Zusammenhang von elliptischen Kurven mit dem Großen Fermatschen Satz sah. Sei a, b, c mit $abc \neq 0$ ganzzahliges teilerfremdes Lösungstriplet einer Fermat-Gleichung. Mit elementaren Mitteln zeigt man, daß es keine Einschränkung ist, wenn der Exponent der Fermat-Gleichung eine Primzahl l ist. Es gelte also

$$a^l + b^l = c^l.$$

Frey betrachtet nun die elliptische Kurve

$$(3) \quad E_{a,b,c} : y^2 = x(x - a^l)(x + b^l)$$

(Frey-Kurve). Ihr geometrischer Konduktor $N_{a,b,c}$ ist ein quadratfreier natürlicher Teiler von abc .

Nachdem die Arbeit einiger unentwegter Koryphäen der arithmetischen Geometrie und Analysis an Taniyamas Vermutung pessimistischer wurde, nahm sie nun ab Mitte der 80-er wieder Fahrt auf. Ein tief liegendes Resultat war der

Abstiegssatz 5 (Ribet [RT], 1990). *Ist die Frey-Kurve $E_{a,b,c}$ modular der Konduktor-Stufe $N_{a,b,c}$, so ist für jeden Primteiler p dieser Stufe die Kurve auch modular zur kleineren Stufe $N_{a,b,c}/p$, falls $v_p(a^{2l}b^{2l}c^{2l}/2^8)$ durch l teilbar ist⁴.*

Inzwischen hatte sich der britische Zahlentheoretiker Andrew Wiles für etwa sechs Jahre ins stille Kämmerlein zurückgezogen. Er erkannte den Zusammenhang zwischen der Taniyama-Vermutung und dem Großen Fermatschen Satz und hielt diese - mit Hilfe der bereits erzielten Fortschritte - für reif, bewiesen

⁴ $a^{2l}b^{2l}c^{2l}/2^8$ ist die (allgemein für elliptische Kurven definierte) *minimale Diskriminante* der Frey-Kurve, $v_p(M)$ bezeichnet den größten Exponenten m , mit $p^m | M$.

zu werden. Seine Umgebung ließ er völlig im Unklaren, woran er arbeitete. Am Ende konnte er die Vermutung (bei abschließender Zusammenarbeit mit R. Taylor) für eine Klasse elliptischer Kurven - sogenannter "semistabiler" - verifizieren, die auch die Kurven von Frey einschlossen (1995). Bevor wir die berühmte Konsequenz ziehen, weisen wir noch darauf hin, dass der Modularitätssatz (Taniyama-Vermutung) zur Jahrtausendwende vollständig (d.h. für alle elliptischen Kurven E/\mathbb{Q} bewiesen wurde (siehe [BCDT]).

Markanter Beweisschritt: Von Taniyama zu Wiles.

Wir nehmen die Existenz eines nichttrivialen Lösungstripels a, b, c einer Fermat-Gleichung und damit die Existenz einer Frey-Kurve $E_{a,b,c}$ wie in (3) an. Wir wissen bereits, dass der geometrische Konduktor $N_{a,b,c}$ ein quadratfreies Produkt von Primteilern von abc ist. Der Modularitätssatz (Taniyama-Vermutung) sorgt dafür, dass E modular der Stufe $N_{a,b,c}$ ist. Nun ist es eine leichte Übungsaufgabe mit Hilfe des Abstiegssatzes von Ribet zu zeigen, dass man von $N_{a,b,c}$ zur Modularitätsstufe 2 absteigen kann, falls 2 Teiler des Konduktors ist (andernfalls sogar zu 1). In jedem Fall gibt es dann eine komplex-analytische Überlagerungsabbildung $X_0(2)_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ für $E = E_{a,b,c}$. Nun ist bekannt, dass $X_0(2)_{\mathbb{C}}$ weiter nichts als die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (komplexe projektive Gerade) ist. In einführenden Vorlesungen über Riemannsche Flächen lernt man, dass keine komplexe Überlagerungsabbildung $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ für elliptische Kurven E existiert. Der Ribetsche Stufen-Abstieg führt also ins Leere: Die Frey-Kurve (eines Fermat-Lösungstripels) erweist sich als Phantom, deren Vision als Fata Morgana. Insgesamt existiert keine echte \mathbb{Z} -Lösung irgendeiner Fermat-Gleichung

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2.$$

Der große Fermatsche Satz ist bewiesen.

Schluss-Bemerkung. Mit den Beweisen gelang eine innigliche Verschmelzung von (unendlicher) Galoistheorie von Zahlkörpern, der Theorie der L-Reihen, der arithmetischen Theorie der Modulformen und der algebraischen Geometrie. Diese Synthese wurde schon in den Jahrzehnten zuvor von führenden arithmetischen Geometern in den Weltzentren der Mathematik weit vorangetrieben. Der Satz von Faltings (Mordell-Vermutung) markierte bereits eine hohe Stufe der Synthese. Auf die Nennung von weiteren Mathematikern und deren Beiträgen wird hier verzichtet, da der Artikel für ein breiteres Publikum verständlich bleiben soll. Interessenten verweise ich auf die Google-Beiträge "Taniyama-Shimura Conjecture - from Wolfram MathWorld" und "Modularitätssatz, Wikipedia".

Einen schönen emotionalen Zugang zur dramatischen Entwicklung des Ideenreigens, der letztendlich zum spektakulären Beweis des Großen Fermatschen Satzes führte, findet man im Buch [Si] von Simon Singh. Man kommt mit einfachen mathematischen Grundkenntnissen aus, um dem Autor mit Spannung zu folgen.

References

□ **Facebook-Animationen**

www.facebook.com/Rolfpeter.holzapfel

- [A1] Nichteuklidisch triangulierter Torus / Rad
- [A2] Euklidischer Torus
- [A3] Ei des Kolumbus
- [A4] Logarithmus-Spirale / Wendeltreppe
- [A5] Tanz auf dem Hyperboloid
- [A6] Entgegengesetzt verdrehte Zylinder
- [A7] Hyperbolisches Getriebe
- [A8] Newton-Kurven
- [A9] Lösungs-Drohnen einer Gleichung, berühmte Gaußsche Doktor-Arbeit
- [A10] Digitale Kegelschnitte
- [A11] Dynamische Lösungszapfen der Gleichung

□ **Facebook/Homepage-Bilder**

- [B1] Nichteuklidisch (unendlich) triangulierte Kreisscheibe
- [B2] Nichteuklidisch triangulierter Torus
- [B3] Fermat-Kurve 4. Grades
- [B4] http://de.wikipedia.org/wiki/Dandelinsche_Kugel

□ **Literatur**

- [Ab] Abel, N.H., Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden, als den vierten, allgemein aufzulösen, *Crelle Journal* **1** (1824), 65 - 84
- [AG] Dèbes, P., Emsalem, M., Romagny, M., Uludag, A.M., *Arithmetic and Geometry Around Galois Theory*, *Progress in Math.* **304**, Birkhäuser 2013
- [Bo] Bohnert, F., *Elementare Stereometrie*, Sammlung Schubert IV, Verl. Göschen, Leipzig 1902
- [BCDT] Breuil, C., Conrad, B., Diamond, F., and Taylor, R., On the Modularity of Elliptic Curves : Over Wild 3-Adic Exercises, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), 843-939, 2001

- [BCEM] Buhler J, Crandell R, Ernvall R, Metsänkylä, T., Irregular primes and cyclotomic invariants to four million. *Math. Comp.* (American Mathematical Society) **61** no.203 (1993), 151153
- [Ca] Cardano, G., *Artis magna sive de regulis algebraicis liber unus*, Italy, 1545; Internet: www.digital-collections.de/index.html?c=autoren_index&ab=C&browsingindex=1&l=de
- [CF] Cajori, F., *A History of Mathematics*, EBook 31061, ISO-8859-1, Project Gutenberg EBook, 2010
- [Da] Dandelin, G., *Mémoire sur quelque propriétés de la focale parabolique*, Royal Belgium Academy of Science, 1822
- [Eu] Euler, L., *Zur Theorie komplexer Funktionen*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, **261**, Geest & Portig, Leipzig, 1983
- [EK] Euler, L., Über die Kontroverse zwischen den Herren Leibniz und Bernoulli über die Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen, Kap. II in [Eu], 54-100
- [Fi] Fischer, Gerd, *Ebene algebraische Kurven*, Vieweg studium, Aufbaukurs Mathematik, Braunschweig/Wiesbaden, 1994
- [FH] Forst, W., Hoffmann, D., *Funktionentheorie erkunden mit MAPLE*, Springer-Lehrbuch, 2002; Internet: www.math.uni-konstanz.de/~hoffmann/Funktionentheorie/kap1
- [GD] Gauß C.F., *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (Helmstadii 1799)
- [GS] Gauß C.F., *Werke X/1*, 243-245, Göttingen 1917
- [GT] Gauß, C.F., *Mathematisches Tagebuch 1796 - 1814*, Ostwalds Klassiker **256**, Akad. Verl.Ges., Geest & Portig, 4. Aufl., Leipzig 1985
- [HC] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., *Anschauliche Geometrie*, Springer, 1932
- [Hi] Hilbert, David, "Mathematische Probleme", Vortrag auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress, Paris, 1900; in: *Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften 252*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1976
- [Ho] Holzapfel, R.-P., *Notebook-Reise ins Mathe-Land: Von Babylon über Pythagoras zu Fermat, Euler, Gauß, Jacobi, Dedekind bis ins digitale Zeitalter*, Forum der Berliner Math. Ges. **21**, Berlin, 2012
- [HP] Holzapfel, R.-P., Homepage: <http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~holzapfl/>

- [HS] Hirsch, M.W., Smale, S., On algorithms for solving $f(x) = 0$, *Comm. Pure Appl. Math.* **32**, 281 - 312
- [In] Infeld, L., *Wen die Götter lieben*, Rütten & Löning, Berlin, 1957
- [Ju] Juschkewitsch, A.P., Einführung zur Sammlung von Aufsätzen L. Eulers zur Theorie der Funktionen komplexer Variabler, Einführungs-Artikel für/in [Eu], 8 - 48
- [Kn] Kneser, M., Ergänzung zu einer Arbeit von Hellmuth Kneser über den Fundamentalsatz der Algebra, *Math. Z.* **177**, 285 - 287
- [ME] *Mathematische Enzyklopädie*, Red. Vinogradov, I.M., Verl. Sowjetskaja Enzyklopedija, Moskva 1977 (russ.); Internet: www.encyclopediaofmath.org/index.php/Galois_theory_inverse_problem_of
- [MF] Milne, J.S., *Modular functions and modular forms*, Google, 2011, pdf
- [MG] Milne, J.S., *Fields and Galois Theory*, Google: Version 4.30, 2012, pdf
- [MY] MrYouMath, Internet: <http://www.youtube.com/watch?v=G9K6BQRL6ZE&feature=related>
- [MR] *Matematitscheskaja Enzpklopedia, Isdatelstwo "Sowjetskaja Enzpklopedia"*, Moskva 1977
- [Ne] Newton, Isaac, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, London, 1704, 531 - 560, in [NO]:
- [NO] *Newtoni, Isaaci, Opera quae extant omnia*, Tom **I**, London, 1779 - 1785
- [Ni] Nickalls, R. W. D., *The quartic equation: invariants and Eulers solution revealed*, Internet: www.nickalls.org/dick/papers/maths/quartic2009.pdf
- [QF] *Quartic function - Wikipedia, the free encyclopedia*: http://en.wikipedia.org/wiki/Quartic_equations#Factorization_into_quadratics
- [RF] Ribenboim, P., *Fermat's last theorem for amateurs*, Springer, 2000
- [RT] Ribet, K.A., *From the Taniyama-Shimura conjecture to Fermat's Last Theorem*, *Annales de la Facult des Sciences de l'Universit de Toulouse* **11** (1990), 116-139
- [Ru] Ruffini, P., *Teoria Generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*, 2 Bände, Bologna 1799,
- [Sh] Shafarjevich, I.R., *Oznovi algebraicheskoy geometrii*, Nauka, Moskwa 1972

- [Si] Singh, S., Fermats letzter Satz: Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels, Deutscher Taschenbuch-Verlag, 16. Aufl. 2013
- [ST] Shimura, G., Taniyama, T., Complex multiplication of abelian varieties and its application to number theory, Publ. Math. Soc. Japan **6**, 1961
- [We] Weber, H., Lehrbuch der Algebra **1**, Vieweg, Braunschweig, 1895
- [Wi] Wieleitner, Heinrich, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, Göschen, Leipzig, 1905
- [Wu] Wussing, H., Arnold, W., Biographien bedeutender Mathematiker, 4. Auflage, VVB Volk und Wissen, Berlin, 1989