

Notebook-Reisen ins Mathe-Land: Von der babylonischen Winkelmess-Tafel zu Pythagoras, Gauß, Jacobi und Dedekind

0. Vorwort.

Unternehmen wir eine virtuelle Zeitreise bis zurück ins antike Babylon. Ein Notebook mit modernem Arithmetik-, Analysis-, und Geometrie-Programm nebst Visualisierungen nehmen wir mit. Es lohnt sich, denn die Mathe-Tontafeln der Babylonier offenbaren uns dadurch spielend deren Lösungen. Sie ermöglichen es uns, anlehrende Fragestellungen, deren Beantwortung damals außer Reichweite lagen, zu beantworten. Ausgangspunkt ist die Keilschrift-Tontafel Plimpton 322, die heute in der Columbia-Universität New York aufbewahrt wird. Sie wurde schon des öfteren in der Neuzeit Gegenstand mathematischer Überlegungen, insbesondere im 20. Jahrhundert. Es handelt sich um eine Tabelle von 15 Winkeln zwischen 45° und 60° mit ungefähren Grad-Abständen. Man entnimmt diese zwei Tontafel-Spalten mit ganzzahligen Seiten rechtwinkliger Dreiecke, die leicht konstruiert werden können und besagte Winkel enthalten. Wurde bisher auf griechische Kenntnisse zu antik-rechnerischer Rekonstruktion der Tafel zurückgegriffen, so zeigt sich nun, dass dies nicht unbedingt nötig ist. Der Gebrauch von Mittelwerten - arithmetischen und geometrischen - reicht völlig aus. In ihnen steckt bereits geburtshelfend die Pythagoras-Relation als Vorläufer des berühmten Lehrsatzes, Mit der Mittelwert-Methode wird die numerische Aufstellung der Tabelle - die immerhin Zahlen bis nahe 20000 enthält - überraschend leicht nachvollziehbar, sogar mit Papier und Bleistift. Mit dem Notebook wird man - anders als mit einem Großrechner (brute force) - gezwungen, einen einfachen Weg zu den Resultaten zu finden. Damit kommt man spielend den ursprünglichen mathematischen Ideen nahe, die oftmals später infolge zeitsparender eleganter Modernisierungs- Schritte verschüttet wurden. Das führte bekanntlich zum Frontal-Unterricht in Mathematik. Stattdessen sollte man doch besser die kreativen Ursprungs-Ideen mehr ins Zentrum der Mathematiklehre rücken und die Stofffülle an unseren Lehranstalten etwas zurückfahren. Dann würde vielleicht auch Mathe kein Horrorfach mehr für Normalbürger sein.

Spielerisch wird auch klar, dass die Babylonier sogar die **vollständige** Winkeltabelle hatten, wenn man die Kathetenlängen auf 15000 beschränkt und die Werte der antiken Winkelfunktion des "reziproken Sinus" exakt in Keilschrift ausdrücken kann. Diese Winkelvollständigkeits-Aussage habe ich nirgendwo gefunden. Sie wird mitsamt transparentem (Notebook-) Beweis hier nachgereicht.

Wieviele pythagoräische Dreiecke (rechtwinklige mit ganzzahligen Seiten) gibt es eigentlich, wenn man die Keilschrift-Bedingung fallen lässt? Wir werden zunächst die primitiven zählen, deren Hypotenuse - wie bei der Tontafel - unterhalb 20000 liegt. Dazu ist ein Sprung in die Neuzeit zu Gauß erforderlich. Gewiss haben die pythagoräischen Dreiecke bei seiner Schöpfung der komplexen Gaußschen Zahlen und deren Untersuchung zahlentheoretischer Eigenschaften eine Rolle gespielt. Die Primzerlegung im Gaußschen Zahlbereich liefert uns dann nicht nur Anzahlbestimmungen, sondern auch die Aufzählung der pythagoräischen Tripel. Diese können unmittelbar von den Exponenten einer Reihe abgelesen werden, die ich *pythagoräische Reihe* nennen werde.

Mit (weiterer) Hilfe einer Jacobischen Thetareihen können wir dann sogar die rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Katheten (und Wurzel-Hypotenuse) ermitteln. Dazu werden *pythagoräische Wurzel-Reihen* aus einer klassischen Theta-Reihe "herausgewaschen". Wie von einer Wäscheleine lassen sich dann die pythagoräischen Dreieckstripel von der Reihe pflücken, abschnittsweise, unmittelbar und explizit.

Den Anstoß zu den Wurzeln kommt auch von den Babyloniern. Sie berechneten $\sqrt{2}$ bis auf ein Millionstel genau. Man muss zum arithmetischen Mittel nur noch das harmonische hinzunehmen, um schnell Wurzeln von natürlichen Zahlen approximieren zu können. Auch dieser Weg wird hier praktisch beschrieben. Wir können dabei bereits explizit die Geburtswehen des Dedekindschen Schnittes erleben und finden somit auch kreativen Zugang zu den Ideen des modernen Aufbaus der Mathematik-Grundlagen im 19. Jahrhundert.

Zusammenfassend sei bemerkt, dass die Erkundungen mit dem Notebook Zeit- und Ländergrenzen überfliegen. Genau besehen vollziehen wir weitgehend Gedankengänge des Schülers und Studenten Carl-Friedrich-Gauß nach. Nachweislich führten umfangreiche Rechenexperimente zu bedeutenden Weiter-Entwicklungen der Mathematik. Zahlreiche heutige Anwendungen gingen aus seinem Werk und dessen Weiterentwicklungen hervor. Auch hat Gauß vorbildlich die Grenzen innerhalb der Mathematik überwunden, was mit dem Notebook wunderbar nachvollzogen werden kann. Die kreativen Wege (zu seinen und späteren geglätteten Beweisen) muss man wohl nachträglich finden, um eigene Kreativität für die Aufgaben des neuen Jahrhunderts zu erlangen. Eine aktuelle Aufgabe besteht z.B. darin, Klassenzahlen indefiniter hermitescher Formen explizit zu bestimmen. Theoretisch stützt man sich dabei auf höhere Modulformen, die von E. Hecke bestimmt wurden, und auf meine Balluniformisierungs-Arbeiten. Die Reisen mit dem Notebook werden damit demnächst fortgesetzt.

In den Abschnitten 1 bis 8 stellen wir nun alte und neue Ergebnisse mit den z.T. neuen Beweisideen zusammen. Für die transparente Ausführung mit dem Notebook, die nicht im Artikel erscheint, wurde ein Anhang geschrieben, der auf meiner Homepage-Version zugänglich ist:
www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~holzapfl/

Inhalt:

1. Mittelwert-Erzeugung der Tafel
2. Vergleich mit der babylonischen Tontafel
3. Sonnenkalender, eine mögliche (antike) Anwendung
4. Vergleich mit der Quadratsummen-Methode
5. Die Winkel-Vollständigkeit der Plimpton-Tafel
6. Die pythagoräische Reihe zur Erfassung primitiver pythagoräischer Dreiecke
7. Approximation von Quadratwurzeln
8. Pythagoräische Wurzel-Reihen, abgeleitet aus einer Jacobischen Theta-Reihe

1. Mittelwert-Erzeugung der Tontafel.

Für zwei Zahlen $0 < u < v$ definiert man das geometrische und das arithmetische Mittel wie folgt:

$$h = h(u, v) = \sqrt{uv} \quad , \quad d = d(u, v) = \frac{u + v}{2} \quad .$$

Letzteres lässt sich problemlos auf negative Zahlen fortsetzen: $b = b(u, v) = \frac{v - u}{2}$. Wie

man leicht sieht, ist die Pythagoras-Relation $b^2 + h^2 = d^2$ erfüllt, so dass wir b, h als Katheten und d als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks interpretieren können. Wir sprechen von *pythagoräischen* Zahlentripeln bzw. Dreiecken. Um geometrische Ähnlichkeiten auszuschließen, beschränken wir nur uns auf *primitive* (d.h. teilerfremde) Tripel (b, h, d) . Wir erzeugen sie durch primitive ungerade Paare (u, v) oder gerade Paare mit primitiver Halbierung. Alle anderen u, v generieren imprimitive Tripel. Lässt man nur gerade u, v mit kleinen Primteilern 2, 3, 5 zu, nur Katheten < 15000 und Dreieckswinkel zwischen 45° und 60° zu, so erhält man folgende Tabelle:

<i>Winkel</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>d</i>	<i>Nr</i>
45.23°	2·5 ²	2 ⁵ ·3 ²	119	120	169	1
45.74°	2·3 ⁶	2 ¹³	3367	3456	4825	2
46.22°	2 ¹¹	2·3 ² ·5 ⁴	4601	4800	6649	3
46.73°	2 ³ ·3 ⁶	2·5 ⁶	12709	13500	18541	4
47.94°	2 ⁵	2·3 ⁴	65	72	97	5
48.45°	2·3 ⁴	2 ⁵ ·5 ²	319	360	481	6
49.69°	2·5 ⁴	2 ³ ·3 ⁶	2291	2700	3541	7
50.23°	2·3 ² ·5 ²	2 ¹¹	799	960	1249	8
51.28°	2 ⁵ ·3 ²	2·5 ⁴	481	600	769	9
52.55°	2 ⁷ ·5 ²	2·3 ⁸	4961	6480	8161	10
53.12°	2	2 ³	3	4	5	11
55.03°	2·5 ⁴	2 ⁹ ·3 ²	1679	2400	2929	12
56.15°	2 ⁷	2·3 ² ·5 ²	161	240	289	13
56.75°	2·3 ⁶	2 ³ ·5 ⁴	1771	2700	3229	14
58.09°	2·5 ²	2·3 ⁴	56	90	106	15
58.73°	2·3 ⁴	2 ⁹	175	288	337	16

Damit haben wir schon die babylonische Tontafel-Winkeltabelle Plimpton 322 generiert, was wir sogleich genauer erörtern werden. Ohne Zweifel waren die Babylonier in der Lage, die nötigen Mittelwert-Rechnungen auszuführen, und zuvor die generierenden Paare aufzulisten.

2. Vergleich mit der babylonischen Tontafel

Die Keilschrift-Tontafel Plimpton 322 enthält die letzten 3 Spalten der obigen Tabelle bis zur Zeile Nr. 15. Die d-Spalte der Hypothenusen wird dort mit "Diagonale" überschrieben und die h-Spalte mit "Höhe". Es ist naheliegend, dass die Begriffe - auch die "Breite" b - der Betrachtung eines rechteckigen Tores entlehnt ist. Das Fehlen der letzten Zeile (Nr. 16) auf der Tafel kann dadurch erklärt werden, dass die Tontafel längs der vorigen Zeile augenscheinlich weggebrochen ist.

Statt des Gradmaßes für Winkel wurde - aus heutiger Sicht - die Winkelfunktion des reziproken Sinus in der ersten Spalte der Tontafel als babylonisches Maß für die Winkel, womit die Anordnung nach Winkelgröße erklärt ist.

Um diese Quotienten im babylonischen Hexagesimal-System exakt - nämlich als Summe ganzzahliger 60er-Potenzen - schreiben zu können, muss verlangt werden, dass die Höhe h nur die Primteiler 2,3,5 hat. Dazu müssen die generierenden Zahlen u, v diese Eigenschaft haben. Solche Zahlen werden (im Sechzigersystem) *regulär* genannt.

Das Paar (h,d) der Nr. 11 wird auf der Tontafel imprimitiv angegeben, nämlich als (h,d) = (60,75). Das hat einen einfachen praktischen Grund, der auf die Längenmessung zurückzuführen ist. Bekannt ist ein babylonischer Messstab, der die stark vergrößerte Form eines Schreibergriffels hat. Mit

Hilfe dieser - in 30 Teile durch Kerben unterteilten (nach dem Fundort benannten) "Nippur-Elle" - lässt sich nun leicht das Dreieck Nr. 11 legen, indem ein Gehilfe einfach zwei dieser Stäbe senkrecht in die Höhe reckt, am Ende eine Schnur der Länge von $2\frac{1}{2}$ Stäben befestigt und sie glatt zum Boden zieht. Dort bildet sich dann der Winkel von etwa 53° . Auf diese Weise lassen sich übrigens alle Winkel der Tabelle mit passenden Stäben und Seilen legen.

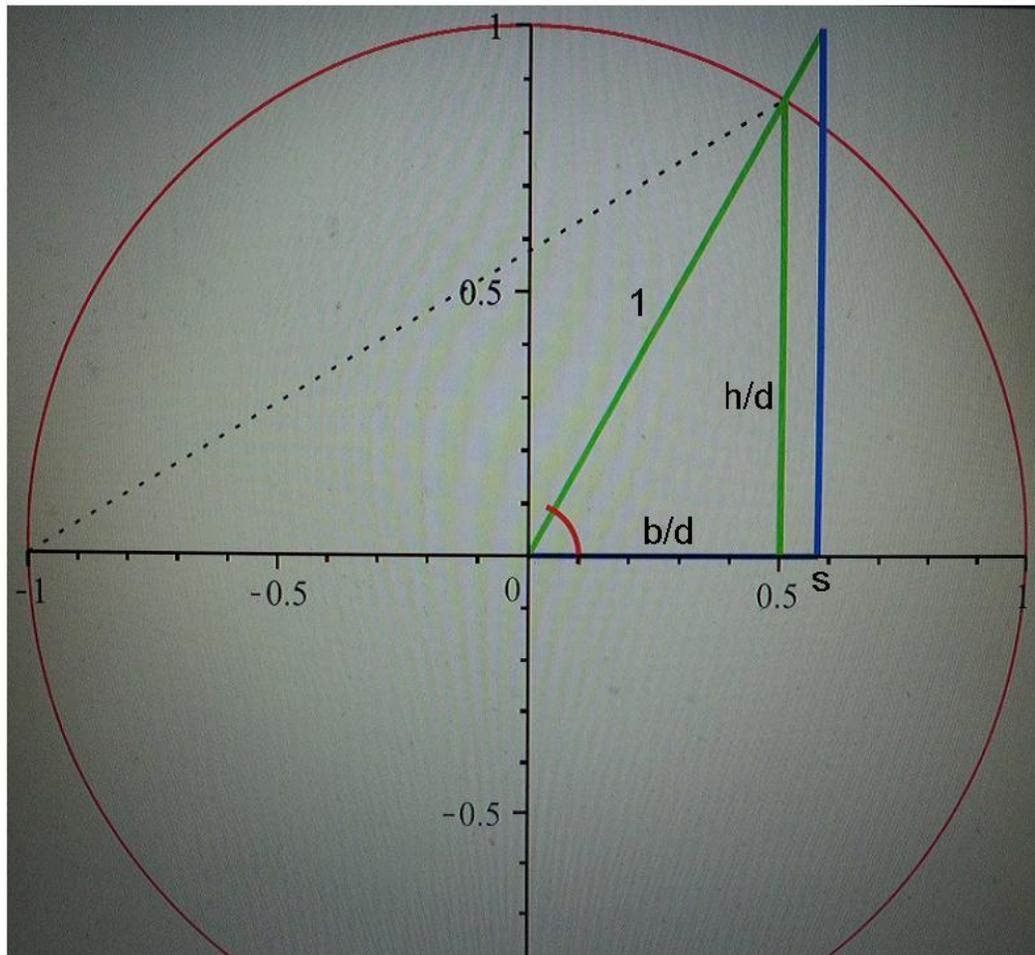
Hätten die Babylonier hypothenusenorientiert gesucht, sagen wir bis $h \leq 20000$, so hätten sie noch ein primitives pythagoräisches Tripel mehr gefunden, nämlich $(b,h,d) = (11529, 16000, 19721)$, das als Nr. 11a in der Literatur erscheint, siehe [A]. Es hätte mit dem Winkel von ca. 54.24° ausgezeichnet nach Nr. 11 in die Tabelle gepasst. Die Rechengehuld war wohl bei Katheten bis 15000 im Altertum erschöpft.

3. Sonnenkalender, eine mögliche (antike) Anwendung.

Auf den ersten Blick ist unklar, warum nicht einfach nur $\frac{d}{h}$ in der Tontafel auftaucht, anstelle der Quadrate. Allerdings ist eine vertikale Bruchlinie der Tontafel zu erkennen, so dass durchaus die Möglichkeit der Existenz einer ursprünglichen $\frac{d}{h}$ -Spalte besteht. Es gibt aber auch einen praktischen Vorteil der Quadratspalte. Wenn ich genau wissen will, in welchem Zeitabschnitt des Jahres ich mich befinde, dann messe ich einfach die Schattenlänge s eines Einheitsstabes zu fixierter Tageszeit. Nach dem Strahlensatz (siehe ähnliches Dreieckspaar mit markiertem Winkel in der Figur (1)), habe damit

das cotangentiale Seitenverhältnis $\frac{b}{h} = \frac{s}{1} = s$. Mit den $\frac{d^2}{h^2}$ -Werten der Tontafel lässt sich die

Schattenlänge schnell zuvor bestimmen. Es gilt nämlich $\frac{d^2}{h^2} - 1 = \frac{d^2 - h^2}{h^2} = \frac{b^2}{h^2} = s^2$.



4. Vergleich mit der Quadratsummen-Methode.

Die alten Griechen wussten bereits wie man (alle) pythagoräischen Tripel konstruiert. Wir beschreiben zunächst, wie man geometrisch darauf kommt. Es wird einfach die ebene Version der stereographischen Projektion angewandt: Von einem Punkt Q des Einheitskreises, man verwendet bequemerweise $Q = (-1,0)$, werden die Punkte $R = R(t) = (0,t)$ der y-Achse auf die Einheitskreislinie projiziert. Der Parameter t ist dann die Steigung der projizierenden Geraden $y = t(x+1)$ durch Q und R, siehe Figur (punktirierte Linie). Damit erhält man die Parametrisierung der offenen Kreisperipherie (ohne Q):

$$P(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{1 - t^2}{t^2 + 1}, \frac{2 \cdot t}{t^2 + 1} \right), t \in \mathbb{R}:$$

Setzen wir $t = \frac{p}{q}$, mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{N}_+$, so erhalten wir Brüche homogener quadratischer Funktionen in den Variablen p, q :

$$x(p, q) = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \quad y(p, q) = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

In projektiven Koordinaten lässt sich daher jeder rationale Kreispunkt im 1. Quadranten in der Form

$(p^2 - q^2 : 2pq : p^2 + q^2)$ schreiben mit pythagoräischem Zahlentripel $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$.

Wir dürfen ohne Punktverlust annehmen, dass p und q teilerfremd sind. Ist p oder q gerade, so ist das Tripel primitiv, andernfalls muss man es noch durch 2 teilen. Es ist nun klar, dass es für jedes pythagoräische Dreieck/Tripel ein primitives natürliches Zahlenpaar (p,q) geben muss. Da die Höhe h und Diagonale d in der Tontafel Plimpton 322 gegeben sind, kann man aus $(h,d) = (2pq, p^2 + q^2)$ leicht das Ursprungspaar (p,q) berechnen. Als Beispiel berechnen wir es für Nr. 4 der Tontafel:

$$\left[\begin{array}{l} \text{with}(SolveTools) : \text{PolynomialSystem}([2 \cdot p \cdot q = 13500, p^2 + q^2 = 18541], [p, q]) [2] \\ \{p = 125, q = 54\} \end{array} \right. \quad (1)$$

5. Die Winkel-Vollständigkeit der Plimpton-Tafel.

Wir wollen zeigen, dass alle Winkel zwischen 45° und 60° (außer Nr. 16) mit der Tontafel erfasst werden, wenn nur reguläre $h \leq 15000$ zugelassen werden. Mit dem Mathe-Notebook ist das eine Kleinigkeit, nachvollziehbar und völlig transparent. Das Programm dazu wird mit der Mathe-Software MAPLE 14 aufgestellt. Diese wurde auch schon oben für die Figur (1) und die Lösung (2) benutzt. Wir folgen der Mittelwert-Methode. Die Schritte (Befehle) dazu werden im Anhang A.5 angegeben.

Mit der Quadratsummen-Methode (Abschnitt 4) klappt es natürlich auch. Jedoch ist der Aufwand beträchtlich größer, so dass für den Nachweis der Winkel-Vollständigkeit der Tafel unbedingt ein PC-Rechner herangezogen werden muss. Ich kann auch in der Literatur keinen Hinweis auf die Winkel-Vollständigkeit der Tontafel entdecken. Nur die Rekonstruktion der Plimpton-Tafelwerte wurde nachvollzogen. Diese kann man aber leicht mit Bleistift, Papier und mit etwas Geduld bewerkstelligen.

6. Die pythagoräische Reihe zur Erfassung primitiver pythagoräischer Dreiecke.

Im Anhang A.7 stellen wir eine Reihe auf, deren Abschnitte bis zum Exponenten 20000 unmittelbar abrufbar sind. Sie sieht am Anfang und in späterer Fortsetzung folgendermaßen aus:

$$U = q^5 + q^{13} + q^{17} + q^{25} + q^{29} + q^{37} + q^{41} + q^{53} + q^{61} + 2q^{65} + q^{73} + 2q^{85} + q^{89} + q^{97} + \dots \\ \dots + q^{7001} + q^{7013} + 2q^{7025} + 2q^{7033} + 2q^{7045} + q^{7057} + q^{7069} + 2q^{7081} + 4q^{7085} + 2q^{7093} \\ + q^{7109} + q^{7121} + q^{7129} + \dots$$

Die Exponenten stimmen mit den Hypothenusen/Diagonalen d geordneter primitiver pythagoräischer Tripel/Dreiecke (b,h,d) , $0 < b < h$, $b^2 + h^2 = d^2$, überein. Man überlegt sich schnell, dass gerade Exponenten nicht vorkommen können. Der Koeffizient bei q^d gibt die Anzahl dieser Dreiecke mit fixierter Hypothenuse d an. Man kann sofort die Anzahl $\text{Pyth}(d)$ aller solcher Tripel bis zu jeder vorgegebenen Schranke N angeben. Im Notebook beschränkte ich mich auf $d \leq 20000$, ähnlich wie die Babylonier, nur ohne Regularitätsbeschränkung:

$$\left[\begin{array}{cccccc} d & 100 & 1000 & 10000 & 20000 \\ \text{Pyth}(d) & 16 & 158 & 1593 & 3186 \end{array} \right]$$

Satz. Es gibt genau 3186 inkongruente primitive pythagoräische Dreiecke mit Hypothenuse $d \leq 20000$.

Die 16 Tripel mit $d \leq 100$ können auch sofort mit Hilfe eines Algorithmus für Gaußsche Zahlen

aufgelistet werden (siehe A.6):

[3, 4, 5], [5, 12, 13], [8, 15, 17], [7, 24, 25], [20, 21, 29], [12, 35, 37], [9, 40, 41], [28, 45, 53],
 [11, 60, 61], [16, 63, 65], [33, 56, 65], [48, 55, 73], [36, 77, 85], [13, 84, 85], [39, 80, 89],
 [65, 72, 97]

Der Abruf funktioniert auch für jeden anderen Abschnitt unserer Reihe. Am Beispiel $d = 7085$ wollen wir Aufstellung der pythagoräischen Reihe und den Algorithmus zur Dreiecksgewinnung erläutern. Das Quadrat von 7085 wird in Gaußsche Primzahlen zerlegt:

$$7085^2 = (1 + 2I)^2 (1 - 2I)^2 (3 + 2I)^2 (3 - 2I)^2 (3 + 10I)^2 (3 - 10I)^2$$

Eine Seminorm der Gaußschen Normzahl 7085^2 ist eine (ganze) Gaußsche Zahl $\alpha = a + bi$ mit Norm $|\alpha|^2 = a^2 + b^2 = 7085^2$. Es gibt in unserem Falle genau 4 nichtassozierte Seminormen:

$$(1 + 2I)^2 \cdot (3 + 2I)^2 \cdot (3 + 10I)^2 = 6693 - 2324i, \quad (1 + 2I)^2 \cdot (3 + 2I)^2 \cdot (3 - 10I)^2 = 4773 + 5236i,$$

$$(1 + 2I)^2 \cdot (3 - 2I)^2 \cdot (3 + 10I)^2 = -6363 - 3116i, \quad (1 + 2I)^2 \cdot (3 - 2I)^2 \cdot (3 - 10I)^2 = 357 - 7076i.$$

Das sind alle Möglichkeiten, denn wir wechseln bei der ersten Seminorm von den Primfaktoren $3+2i$, $3+10i$ jeweils zu ihren konjugierten (bei Fixierung des ersten). Von den Real- und Imaginärteilen liest unser Algorithmus dann die pythagoräischen Tripel ab:

$$[2324, 6693, 7085], [4773, 5236, 7085], [3116, 6363, 7085], [357, 7076, 7085].$$

Aus der elementaren Zahlentheorie ist bekannt, dass genau diejenigen $d > 1$ die Hypotenuse eines pythagoräischen Dreiecks ist, wenn jeder Primteiler $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist. Die Anzahl der Seminormen stimmt mit $\text{Pyth}(d)$ überein und hat die einfache Berechnungsformel $2^{t(d)-1}$, wobei $t(d)$ die Anzahl der Primteiler von d ist. Auf diese Weise werden die Exponenten und Koeffizienten der pythagoräischen Reihe gewonnen.

7. Approximation von Quadratwurzeln.

Natürlich interessierten sich die Babylonier auch für die Diagonale eines Quadrates, sagen wir mit Seitenlänge 1. Erstaunlicherweise konnten sie $\sqrt{2}$ bis auf ein Millionstel genau im Hexagesimalsystem approximieren. Für das Notebook ist es ein Kinderspiel. Man braucht noch ein weiteres Mittel zweier

Zahlen, nämlich das harmonische: $H(u,v) = \frac{2uv}{u+v}$. Für $0 < u < v$ erhält man die Abschätzung

$$u < u_1 := H(u, v) < \sqrt{uv} < \frac{u+v}{2} =: v_1 < v$$

Approximationen des geometrischen Mittels \sqrt{uv} : die u_i - Folge von unten und die v_i - Folge von oben. Um $\sqrt{2}$ zu approximieren, starten wir mit $u = 1, v = 2$:

$$\begin{array}{cc} u_i & , & v_i \\ 1.333333 & , & 1.500000 \\ 1.411765 & , & 1.416666 \\ 1.414211 & , & 1.414216 \\ 1.414214 & , & 1.414214 \end{array}$$

Damit ist $\sqrt{2}$ auf 6 Stellen nach dem Komma genau berechnet, Details in Anhang A.7.

8. Pythagoräische Wurzel-Reihen, abgeleitet aus einer Jacobischen Theta-Reihe.

Die Anzahl der Lösungen der diophantischen Gleichung $x^2 + y^2 = N$ wird durch die Koeffizienten der zweiten Potenz einer klassischen ϑ – Reihe angegeben, siehe [BF], VII.1. Genauer verwendet man

$$\vartheta(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2} = 1 + 2 \sum_{n > 0} q^{n^2}, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\},$$

Deren Quadrat $Th(\tau)$ lässt sich koeffizientenweise leicht bis zur q – Potenz von 1000000 berechnen, was uns ermöglicht, alle pythagoräischen Dreiecke mit Hypothenuse bis 1000 zu erfassen. Statt Th berechnen wir gleich θ :

$$\left[\begin{array}{l} > G := 10^6 + 1 : g := 1000 : \\ \vartheta := \text{taylor}(1 + 2 \cdot \text{sum}(q^{m^2}, m = 1 .. g), q, G) : \theta := \text{taylor}\left(\frac{1}{4} \cdot (\vartheta^2 - 1), q, G\right) : \end{array} \right.$$

$$= q + q^2 + q^4 + 2q^5 + q^8 + q^9 + 2q^{10} + 2q^{13} + q^{16} + 2q^{17} + q^{18} + 2q^{20} + 3q^{25} + 2q^{26} + 2q^{29} +$$

$$\dots$$

$$\dots + 2q^{999961} + 4q^{999962} + 2q^{999968} + 4q^{999970} + 12q^{999973} + 2q^{999981} + 4q^{999986} + 4q^{999997}$$

$$+ 7q^{1000000} +$$

Wir haben die Konstante 1 weggelassen. Durch 4 geteilt können wir von den Koeffizienten q^N , $N > 0$, jetzt die Anzahl der nichtnegativen Lösungen von $x^2 + y^2 = N$ ablesen. Wir wollen nur noch die positiven

Lösungen haben. Dazu müssen wir einfach alle Glieder mit quadratischen Exponenten abziehen. Mit

einem Schlag erreichen wir das, indem wir $t_1 := \sum_{i=1}^g q^{i^2}$ subtrahieren. Die Exponenten der Reihe

$T_1 = \theta - t_1$ sind gerade die Normen $a^2 + b^2$ der ganzen Gaußschen Zahlen $a + bi$. Der Koeffizient von q^N stimmt mit der Anzahl der (ungeordneten) Paare (a, b) mit $a^2 + b^2 = N$, $0 < a, b$, überein. Wir nennen (a, b, \sqrt{N}) in diesem Falle ein *pythagoräisches Wurzel-Tripel*, das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen des Tripels ein *pythagoräisches Wurzel-Dreieck*. Durch Abzug der Reihe $\sum q^{2 \cdot j^2}$ und anschließender Division durch zwei erhalten wir die *pythagoräische Wurzelreihe* T_3

geordneter Dreiecke. Von ihr liest man die Anzahl geordneter (d.h. mit $a < b$) Wurzel-Tripel/Dreiecke mit fixierter Hypothenuse \sqrt{N} ab. Anfangs- und Endabschnitt sehen folgendermaßen aus:

$$q^5 + q^{10} + q^{13} + q^{17} + q^{20} + q^{25} + q^{26} + q^{29} + \dots + q^{50} + q^{52} + q^{53} + q^{58} + q^{61} + 2q^{65} + \dots$$

$$+ q^{999961} + 2q^{999962} + q^{999968} + 2q^{999970} + 6q^{999973} + q^{999981} + 2q^{999986} + 2q^{999997} + 3q^{1000000} +$$

$$\dots$$

Arithmetisch-geometrisch betrachtet werden alle Dreiecke mit ganzzahligen Katheten $0 < a < b$ mit Hypothenuse ≤ 1000 gezählt. Die Kathetenpaare sind dabei i.a. nicht primitiv. Bezeichne $W(\sqrt{N})$ die Anzahl der geordneten pythagoräischen Wurzel-Tripel/Dreiecke der Hypothenuse $\leq \sqrt{N}$. Dann ergibt sich aus der Kenntnis von T_3 die folgende Tabelle:

$$\begin{bmatrix} N & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 \\ W(\sqrt{N}) & 2 & 31 & 367 & 3842 & 39005 & 391840 \end{bmatrix}$$

Darin sind leider auch alle Dreiecke mit imprimitiven Kathetenpaaren erfasst. Es gelingt uns, die Teilreihe der primitiven (a,b,N) herauszulösen. Wir nennen sie die *primitive pythagoräische Wurzelreihe*. Aufgeteilt in ungerade (bis 100) und gerade Exponenten (bis 200) findet man (siehe Anhang A.8):

$$q^5 + q^{13} + q^{17} + q^{25} + q^{29} + q^{37} + q^{41} + q^{53} + q^{61} + 2q^{65} + q^{73} + 2q^{85} + q^{89} + q^{97} + \dots \\ + q^{10} + q^{26} + q^{34} + q^{58} + q^{74} + q^{82} + q^{106} + q^{122} + 2q^{130} + q^{146} + 2q^{170} + q^{178} + q^{194} + \dots$$

Für jeden Abschnitt der Reihe lässt sich sofort per Algorithmus mit Hilfe Gaußscher Primzahlzerlegung die entsprechende Folge pythagoräischer Wurzel-Dreiecke aufstellen. Für ungerade Exponenten kriegt man

$$[1, 2, \sqrt{5}], [2, 3, \sqrt{13}], [1, 4, \sqrt{17}], [2, 5, \sqrt{29}], [1, 6, \sqrt{37}], [4, 5, \sqrt{41}], [2, 7, \sqrt{53}], \\ [5, 6, \sqrt{61}], [1, 8, \sqrt{65}], [4, 7, \sqrt{65}], [3, 8, \sqrt{73}], [2, 9, \sqrt{85}], [6, 7, \sqrt{85}], \\ [5, 8, \sqrt{89}], [4, 9, \sqrt{97}] \dots,$$

für die geraden hingegen

$$[1, 3, \sqrt{10}], [1, 5, \sqrt{26}], [3, 5, \sqrt{34}], [3, 7, \sqrt{58}], [5, 7, \sqrt{74}], [1, 9, \sqrt{82}], [5, 9, \sqrt{106}], \\ [1, 11, \sqrt{122}], [7, 9, \sqrt{130}], [3, 11, \sqrt{130}], [5, 11, \sqrt{146}], [7, 11, \sqrt{170}], [1, 13, \sqrt{170}], \\ [3, 13, \sqrt{178}], [5, 13, \sqrt{194}],$$

siehe Anhang A.8. Zum Abschluss wollen wir die geordneten primitiven pythagoräischen Wurzel-Dreiecke zählen. Mit $PW(\sqrt{N})$ bezeichnen wir die Anzahl der primitiven geordneten pythagoräischen Wurzel-Dreiecke mit Hypotenuse $\leq \sqrt{N}$ (Norm $\leq N$):

$$\begin{bmatrix} N & 10 & 100 & 1000 & 10000 \\ PW(\sqrt{N}) & 2 & 21 & 214 & 2168 \end{bmatrix}$$

Bemerkung. Man muss noch überall das gleichschenklige Dreieck mit Seitenlängen $[1, 1, \sqrt{2}]$ hinzuzählen.

Literatur.

Mathe-historisch:

- [A] Abdulrahman A. Abdulaziz, The Plimpton 322 Tablet and the Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples, *arXiv*: 1004.0025 v1 [*math.HO*] 31 Mar 2010, Internet
- [Ec] Ecklin, Sabine, Zählen – Messen – Wägen: Rechnen vor 4000 Jahren, Internet
- [Er] Erath, Christoph, Babylonische Mathematik mit Schwerpunkten aus der Zahlentheorie, Internet
- [NS] Neugebauer, O., Sachs, A., Mathematical cuneiform texts, American Oriental Series, Vol. 29, New Haven, 1945

Pädagogisch:

- [P] Pieper, Herbert, HEUREKA Ich hab's gefunden, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988

Fortgeschritten-mathematisch:

- [BF] Busam, R., Freitag, E., Funktionentheorie, Kap. VI, VII, Springer, 1993
- [Z] Zagier, Don, Zetafunktionen und quadratische Körper, Springer 1981

Anhang: Notebook-Transparenz mittels MAPLE 14

A.3 Erzeugung der Figur.

A.5 Winkel-Vollständigkeit

A.6 Aufstellung und Gebrauch der pythagoräischen Reihe

A.7 Wurzel-Approximation

A.8 Ableitung der pythagoräischen Wurzel-Reihen aus der klassischen Modulform

```

> with(plots) : with(plottools) :
K := plot([sin(x), cos(x), x = -π..π], color = red, style = line, thickness = 1) :
L0 := line([-1, 0], [1/2, sqrt(3)/2], color = black, linestyle = dot, thickness = 1) :
L3 := line([1/2, 0], [1/2, sqrt(3)/2], color = green, linestyle = solid, thickness = 2) :
L4 := line([0, 0], [1/2, sqrt(3)/2], color = green, linestyle = solid, thickness = 2) :
L1 := line([0, 0], [1/sqrt(3), 1], color = green, linestyle = solid, thickness = 2) :
L2 := line([0, 0], [1/sqrt(3), 0], color = blue, linestyle = solid, thickness = 2) :
L5 := line([1/sqrt(3), 0], [1/sqrt(3), 1], color = blue, linestyle = solid, thickness = 2) :
k := plot([0.1*cos(x), 0.1*sin(x), x = -π/20 .. π/3 + π/20], color = red, style = line, thickness
= 2) :

```

A.5 Winkel-Vollständigkeit.

Die Winkelungleichungen $45^\circ < w < 60^\circ$ sind äquivalent zu den Restriktionen $3 - 2\sqrt{2} < \frac{u}{v} < \frac{1}{3}$ für das Mittelwert-generierende Paar (u,v) , wie man leicht mit etwas Dreiecks-Trigonometrie einsieht.

```

> bound := proc(r, s)
option SchrankenPrüfung :
if evalf(3 - 2*sqrt(2)) < r/s and r/s < 1/3 then [r, s] : else ∞ :
end if:
end proc:
> reg := proc(n)
option RegularitätsPrüfer :
if gcd(n, 60^4) = n then n : else ∞ :
end if:
end proc:
> Mw := proc(r, s)
option MittelwertPaar :

```

```

[  $\left[ \sqrt{r \cdot s}, \frac{r+s}{2} \right]$ :
  end proc:

```

Wir stellen zunächst die generierenden regulären Paare $u < v$ zusammen mit $ggT = 2$, von denen u oder v eine reine Potenz von 2 ist:

```

[ > for a from 1 to 7 do g2[a] := seq(seq([22·a-1, 2·32·b·52·c], c=0..3), b=0..4) od: G2
  := [seq(g2[a], a=1..7)]:
  RS2 := sort([seq(sort(G2[i]), i=1..nops(G2))]):
  for i from 1 to nops(RS2) do B2[i] := bound(RS2i[1], RS2i[2]) od: sort([seq(B2[i], i=1
  ..nops(RS2))]):

```

Aus der letzten Folge (ersetze Doppelpunkt durch Semikolon, um sie anzuzeigen) pickt man alle zulässigen generierenden Paare heraus (u, v) heraus:

```

[ > uv2 := [2, 8], [32, 162], [128, 450], [162, 512], [450, 2048], [1458, 8192], [2048, 11250],
  [8192, 31250]:
  Mittelwertpaare; mw2 := seq(subs(Mw(uv2j[1], uv2j[2]), j=1..7);
  Mittelwertpaare
  mw2 := [4, 5], [72, 97], [240, 289], [288, 337], [960, 1249], [3456, 4825], [4800, 6649] (2)

```

Damit hat man schon fast die Hälfte der Tabelle erfasst, nämlich die Nr. 11, 5, 13, 16, 8, 2, 3. Nun verteilen wir die Faktoren 3, 5 getrennt auf u, v :

```

[ > for a from 1 to 7 do g3[a] := seq(seq([2·32·b, 22·a-1·52·c], c=0..3), b=0..4) od:
  G3 := [seq(g3[a], a=1..7)]: RS3 := sort([seq(sort(G3[i]), i=1..nops(G3))]):
  for i from 1 to nops(RS3) do B3[i] := bound(RS3i[1], RS3i[2]) od: sort([seq(B3[i], i=1
  ..nops(RS3))]):
[ > uv3 := [50, 162], [162, 800], [1458, 5000], [1458, 8192], [3200, 13122]:
  Mittelwertpaare; mw3 := seq(subs(Mw(uv3j[1], uv3j[2]), j=1..5);
  Mittelwertpaare
  mw3 := [90, 106], [360, 481], [2700, 3229], [3456, 4825], [6480, 8161] (3)

```

Damit erfassen wir die neuen Mittelwertpaare Nr. 15, 6, 14, 2, 10 der Tontafel.

Um die restlichen Nr.

1, 9, 12, 7, 4 der Tafel zu kriegen vertauschen wir einfach nur die Rollen von 3 und 5.

Die 11a bekommen wir noch gratis dazu:

```

[ > for a from 1 to 7 do g5[a] := seq(seq([2·52·c, 22·a-1·32·b], c=0..3), b=0..4) od:
  G5 := [seq(g5[a], a=1..7)]: RS5 := sort([seq(sort(G5[i]), i=1..nops(G5))]):
  for i from 1 to nops(RS5) do B5[i] := bound(RS5i[1], RS5i[2]) od: sort([seq(B5[i], i=1
  ..nops(RS5))]):
[ > uv5 := [50, 288], [288, 1250], [1250, 4608], [1250, 5832], [5832, 31250], [8192, 31250]:
  Mittelwertpaare; mw5 := seq(subs(Mw(uv5j[1], uv5j[2]), j=1..6);
  Mittelwertpaare
  mw5 := [120, 169], [600, 769], [2400, 2929], [2700, 3541], [13500, 18541], [16000, 19721] (4)

```

A.6 Aufstellung und Gebrauch der pythagoräischen Reihe.

Grundlegend sind hier folgende Paket-Öffnungen:

[> *with(GaussInt) : with(linalg) :*

Des weiteren werden folgende Prozeduren gebraucht :

```
[> PF := proc(N)
  option Primfaktoren :
  [seq(ifactors(N)[2][j][1], j = 1 .. nops(ifactors(N)[2]))]
end proc:
> Vz := proc(N)
  option VollZerlegungsTest :
  local Pf4 : local n : local Prd :
  Pf4 := PF(N) mod 4 : n := nops(Pf4) :

  Prd :=  $\prod_{j=1}^n$  Pf4[j] :
  if Prd > 1 then 0 : else N :
  end if:
end proc:
  Beispiel : Vz(65)
```

65

(5)

```
[> Sm := proc(N)
  option SeminormZahlvonN :
  local Pf4 : local Prd :
  Pf4 := PF(N) mod 4 :
  Prd := mul(Pf4[i], i = 1 .. nops(Pf4)) :
  if Prd > 1 then 0 : else  $2^{nops(ifactors(N)[2]) - 1}$  :
  end if:
end proc:
```

```
[> Zw := proc(F, n, N)
  option ReihenAbschnitt :
  local AB : local Ab :
  Ab := convert(taylor(F, q, n), polynom) : AB := convert(taylor(F, q, N + 1), polynom) :
  taylor(AB - Ab, q, N + 1)
end proc:
```

```
[> PTs := proc(N)
  option PrimitivePythDreiecke :
  local GPz : local SNs :
  if Sm(N) = 1 then GPz := Gfactors(N)[2][1][1]2 · Gfactors(N)[2][1][2] :
  sort([|Re(GPz)|, |Im(GPz)|, N]) :
  else:
  if Sm(N) = 2 then GPz := Gfactors(N)[2][1][1]2, Gfactors(N)[2][3][1]2 :
  sort([|Re(GPz[1]·GPz[2])|, |Im(GPz[1]·GPz[2])|, N]),
  sort([|Re(GPz[1]·conjugate(GPz[2]))|, |Im(GPz[1]·conjugate(GPz[2]))|, N]) :
  else :
  if Sm(N) = 4 then GPz := Gfactors(N)[2][1][1]2, Gfactors(N)[2][3][1]2,
```

```

Glfactors(N) [2][5][1]^2 :
  sort( [|Re(GPz[1]·GPz[2]·GPz[3])|,|Im(GPz[1]·GPz[2]·GPz[3])|, N]),
  sort( [|Re(GPz[1]·GPz[2]·conjugate(GPz[3]))|,|Im(GPz[1]·GPz[2]·conjugate
(GPz[3]))|, N]),
  sort( [|Re(GPz[1]·conjugate(GPz[2])·GPz[3])|,|Im(GPz[1]·conjugate(GPz[2])
·GPz[3])|, N]),
  sort( [|Re(GPz[1]·conjugate(GPz[2])·conjugate(GPz[3]))|,
|Im(GPz[1]·conjugate(GPz[2])·conjugate(GPz[3]))|, N]):
  else ∞:
  end if:
end if:
end if:
end proc:

```

Beispiel : PTs(25)

[7, 24, 25]

(6)

```

> V0 := -sort([seq(-Vz(2·k+1), k=1..10000)]) : V := sort([seq(V0[i], i=1..2071)]) :
seq(V[i], i=1..20); seq(V[i], i=2055..2071);

```

5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97, 101, 109, 113, 125, 137, 145
19841, 19853, 19861, 19865, 19885, 19889, 19897, 19913, 19925, 19937, 19945, 19949,
19961, 19973, 19981, 19993, 19997

(7)

```

> K := seq(2nops(PF(V[i]))-1, i=1..2071) : Maximum = max(seq(K[i], i=1..2071));
Test : seq(K[i], i=1..20) : seq(K[i], i=2055..2071) :

```

Maximum = 4

(8)

Bemerkung. $2^{nops(PF(V[i]))-1} = Sm(V[i])$ zählt die primitiven pyth. Tripel der Hypothenuse $V[i]$.

```

> Pythagoräische Reihe : U := taylor(add(K[j]·qV[j], j=1..2071), q, 20001) : Zw(U, 1, 100);
Zw(U, 7000, 7130);

```

$q^5 + q^{13} + q^{17} + q^{25} + q^{29} + q^{37} + q^{41} + q^{53} + q^{61} + 2q^{65} + q^{73} + 2q^{85} + q^{89} + q^{97}$
 $q^{7001} + q^{7013} + 2q^{7025} + 2q^{7033} + 2q^{7045} + q^{7057} + q^{7069} + 2q^{7081} + 4q^{7085} + 2q^{7093}$
 $+ q^{7109} + q^{7121} + q^{7129}$

(9)

Pyth(n) := Anzahl der primitiven pythagoräischen Dreiecke der Hypothenuse $\leq N$:

```

> linalg[matrix]
(2, 5, [N, seq(10j, j=2..4)], 2·104, Pyth(N), seq(subs(q=1, Zw(U, 1, 10j)), j=2..4),
subs(q=1, Zw(U, 1, 2·104)))

```

N	100	1000	10000	20000
Pyth(N)	16	158	1593	3186

(10)

PTs funktioniert für alle quadratfreien in $\mathbb{Q}(i)$ vollverzweigten N mit höchstens 3 natürlichen verschiedenen Primfaktoren und für Primzahlpotenzen p^n , $p \equiv 1 \pmod{4}$, $n > 0$.

```

> seq(PTs(V[i]), i=1..14); PTs(7085)
[3, 4, 5], [5, 12, 13], [8, 15, 17], [7, 24, 25], [20, 21, 29], [12, 35, 37], [9, 40, 41], [28, 45,
53], [11, 60, 61], [16, 63, 65], [33, 56, 65], [48, 55, 73], [36, 77, 85], [13, 84, 85], [39,
80, 89], [65, 72, 97]

```

A.7 Wurzel-Approximation.

```

> HA :=proc(u, v)
  option HarmonischArithmetischesMittel :
  local H : local A :
    H :=  $\frac{2 \cdot u \cdot v}{u + v}$  : A :=  $\frac{u + v}{2}$  :
    H, A :
  end proc:
> u := 1 : v := 2 : ha[0] := u, v : for i from 0 to 3 do ha[i + 1] := evalf[7]( HA(hai[1],
  hai[2]) ) od:
for i from 1 to 4 do hai od;

```

1.333333, 1.500000
 1.411765, 1.416666
 1.414211, 1.414216
 1.414214, 1.414214

A.8 Ableitung der pythagoräischen Wurzel-Reihen aus der klassischen Modulform.

```

> Ex :=proc(F)
  option ExponentenFolge :
  local P : local qdF : local CF : local CF0 :
  P := convert(F, polynom) : CF0 := [coeffs(P)] :
  qdF := expand(q · diff(P, q)) : CF := [coeffs(qdF)] :
  sort([seq( $\frac{CF[i]}{CF0[i]}$ , i = 1 .. nops(CF))]) :
  end proc:
> Pg :=proc(N)
  option PythWurzelDreieckeGeraderN :
  local GPz : local SNs :
  if Sm( $\frac{N}{2}$ ) = 1 then GPz := (1 + I) · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][1][1] Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][1][2] :
  sort([|Re(GPz)|, |Im(GPz)|,  $\sqrt{N}$ ]) :
  else:
  if Sm( $\frac{N}{2}$ ) = 2 then GPz := (1 + I) · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][1][1]
  · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][3][1],
  (1 + I) · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][1][1]
  · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][4][1] :
  sort([|Re(GPz[1])|, |Im(GPz[1])|,  $\sqrt{N}$ ]), sort([|Re(GPz[2])|, |Im(GPz[2])|,  $\sqrt{N}$ ]) :

```

```

else ∞:
end if:
end if:
end proc:
Pg(2·85)

```

$$[7, 11, \sqrt{170}], [1, 13, \sqrt{170}]$$

(13)

```

> Sf := proc(n)
option SquarefreeAnzeiger:
if mul(ifactors(n)[2][i][2], i = 1 .. nops(ifactors(n)[2])) = 1 then n else 0:
end if:
end proc:

```

```

> g := 1000 : G := g2 + 1 = 1000001 :

```

```

> θ := 1 + 2 · sum(qm2, m = 1 .. g) : θ :=  $\frac{1}{4} \cdot (\theta^2 - 1)$  : Zw(θ, 1, 50);

```

$$q + q^2 + q^4 + 2q^5 + q^8 + q^9 + 2q^{10} + 2q^{13} + q^{16} + 2q^{17} + q^{18} + 2q^{20} + 3q^{25} + 2q^{26} + 2q^{29} + q^{32} + 2q^{34} + q^{36} + 2q^{37} + 2q^{40} + 2q^{41} + 2q^{45} + q^{49} + 3q^{50}$$

(14)

```

> t1 :=  $\sum_{j=1}^g q^{j^2}$  : T2 := θ - t1 : Zw(T2, 1, 50)

```

$$q^2 + 2q^5 + q^8 + 2q^{10} + 2q^{13} + 2q^{17} + q^{18} + 2q^{20} + 2q^{25} + 2q^{26} + 2q^{29} + q^{32} + 2q^{34} + 2q^{37} + 2q^{40} + 2q^{41} + 2q^{45} + 3q^{50}$$

(15)

```

> t2 :=  $\sum_{j=1}^{\text{floor}(\frac{gg}{\sqrt{2}})}$  q2·j2 : T3 :=  $\frac{1}{2} \cdot (T_2 - t_2)$  : Zw(T3, 1, 70); Zw(T3, 999960, 1000000)

```

$$q^5 + q^{10} + q^{13} + q^{17} + q^{20} + q^{25} + q^{26} + q^{29} + q^{34} + q^{37} + q^{40} + q^{41} + q^{45} + q^{50} + q^{52} + q^{53} + q^{58} + q^{61} + 2q^{65} + q^{68} + q^{999961} + 2q^{999962} + q^{999968} + 2q^{999970} + 6q^{999973} + q^{999981} + 2q^{999986} + 2q^{999997} + 3q^{1000000}$$

(16)

$W(\sqrt{N})$ = Anzahl der pythagoräischen Wurzel-Dreiecke mit Hypothenuse $\leq \sqrt{N}$ (Norm $\leq N$):

```

> linalg[matrix](2, 7, [N, seq(10j, j = 1 .. 6), W(√N), seq(subs(q = 1, Zw(T3, 1, 10j)), j = 1 .. 6)])

```

$$\begin{bmatrix} N & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 \\ W(\sqrt{N}) & 2 & 31 & 367 & 3842 & 39005 & 391840 \end{bmatrix}$$

(17)

```

> T3 := Zw(T3, 1, 10000) : E := Ex(T3) : nops(E) = 2649 :

```

Primitiv-Reihe herauswaschen:

zunächst quadratfreie Teilfolge ermitteln:

```

> Eqf := sort([seq(Sf(E[i]), i = 1 .. 2649)]) : Eqf[1142] = 5 : Eqf[2649] = 9997 :

```

Indexverschiebung, dann Teilreihe von T_3 mit quadratfreien Exponenten:

$$\begin{aligned}
 & \text{[} > E0 := [\text{seq}(Eqf[i], i = 1142 .. 2649)]: E0[1] = 5 : E0[1508] = 9997 : nops(E0) = 1508 : \\
 & \text{[} > C0 := \text{seq}(\text{coeff}(T3, q^{EQ[i]}), i = 1 .. 1508) : T0 := \text{taylor}(\text{add}(C0[i] \cdot q^{EQ[i]}, i = 1 .. 1508), q, \\
 & \quad 10001) : \\
 & \quad Zw(T0, 1, 100); Zw(T0, 9910, 10000) \\
 & \quad q^5 + q^{10} + q^{13} + q^{17} + q^{26} + q^{29} + q^{34} + q^{37} + q^{41} + q^{53} + q^{58} + q^{61} + 2q^{65} + q^{73} + q^{74} \\
 & \quad + q^{82} + 2q^{85} + q^{89} + q^{97} \\
 & \quad q^{9914} + q^{9929} + q^{9938} + q^{9941} + q^{9946} + q^{9949} + 2q^{9953} + 2q^{9962} + 2q^{9965} + 2q^{9970} + q^{9973} \\
 & \quad + 2q^{9985} + q^{9986} + 2q^{9997} \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{[} > \text{linalg}[\text{matrix}](2, 5, [\text{N}, \text{seq}(10^j, j = 1 .. 4), \text{PW}(\sqrt{\text{N}}), \text{seq}(\text{subs}(q = 1, Zw(T0, 1, 10^j)), j = 1 \\
 & \quad .. 4)]); \\
 & \quad \left[\begin{array}{ccccc} N & 10 & 100 & 1000 & 10000 \\ \text{PW}(\sqrt{N}) & 2 & 21 & 214 & 2168 \end{array} \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

$\text{PW}(\sqrt{N})$ = Anzahl der primitiven geordneten pythagoräischen Wurzel-Dreiecke mit Hypothenuse $\leq \sqrt{N}$ (Norm $\leq N$):

Ungerade Teilfolge:

$$\begin{aligned}
 & \text{[} > \text{Ug} := \text{proc}(n) \\
 & \quad \text{option GeradePotenzAnnullator :} \\
 & \quad \text{if type}\left(\frac{n-1}{2}, \text{integer}\right) \text{ then } n \text{ : else } 0 : \\
 & \quad \text{end if;} \\
 & \quad \text{end proc;} \\
 & \text{[} > E0u := \text{sort}([\text{seq}(\text{Ug}(E0[i]), i = 1 .. 1508)]) : E0u[513] = 5 : E0u[1508] = 9997 : \\
 & \text{[} > E1 := [\text{seq}(E0u[i], i = 513 .. 1508)]: E1[1] = 5 : E1[996] = 9997 : nops(E1) = 996 : \\
 & \quad \text{Anfang : } e1 := [\text{seq}(E1[i], i = 1 .. 13)]; \\
 & \quad \quad e1 := [5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97] \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{[} > \text{Pu} := \text{proc}(N) \\
 & \quad \text{option PythWurzelDreieckeUngeraderN :} \\
 & \quad \text{local GPz : local SNs :} \\
 & \quad \text{if } Sm(N) = 1 \text{ then } GPz := \text{Gfactors}(N)[2][1][1]^{\text{Gfactors}(N)[2][1][2]} : \\
 & \quad \text{sort}([\text{Re}(GPz), \text{Im}(GPz), \sqrt{N}]) : \\
 & \quad \text{else;} \\
 & \quad \quad \text{if } Sm(N) = 2 \text{ then } GPz := \text{Gfactors}(N)[2][1][1] \cdot \text{Gfactors}(N)[2][3][1], \\
 & \quad \quad \quad \text{Gfactors}(N)[2][1][1] \cdot \text{Gfactors}(N)[2][4][1] : \\
 & \quad \quad \text{sort}([\text{Re}(GPz[1]), \text{Im}(GPz[1]), \sqrt{N}]), \text{sort}([\text{Re}(GPz[2]), \text{Im}(GPz[2]), \sqrt{N}]) \\
 & \quad \quad \text{else NichtErfasst :} \\
 & \quad \quad \text{end if;} \\
 & \quad \text{end if;} \\
 & \quad \text{end proc;} \\
 & \quad \text{Beispiel : Pu}(65) \\
 & \quad \quad [1, 8, \sqrt{65}], [4, 7, \sqrt{65}] \quad (21)
 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Pu und auch Pg (unten) funktionieren nur für Primzahlpotenzen N oder Produkte zweier Primzahlen.

```

> seq(Pu(eI[i]), i=1..13);
[1, 2, √5], [2, 3, √13], [1, 4, √17], [2, 5, √29], [1, 6, √37], [4, 5, √41], [2, 7, √53],
[5, 6, √61], [1, 8, √65], [4, 7, √65], [3, 8, √73], [2, 9, √85], [6, 7, √85], [5, 8,
√89], [4, 9, √97]

```

(22)

```

> Pg := proc(N)
  option PythWurzelDreieckeGeraderN :
  local GPz : local SNs :

  if Sm( $\frac{N}{2}$ ) = 1 then GPz := (1 + I) · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][1][1] Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][1][2] :
  sort([|Re(GPz)|, |Im(GPz)|, √N]) :
  else:
    if Sm( $\frac{N}{2}$ ) = 2 then GPz := (1 + I) · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][1][1]
      · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][3][1],
        (1 + I) · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][1][1]
      · Gfactors( $\frac{N}{2}$ )[2][4][1] :
    sort([|Re(GPz[1])|, |Im(GPz[1])|, √N]), sort([|Re(GPz[2])|, |Im(GPz[2])|, √N])
  else NichtErfasst :
  end if:
  end if:
  end proc:
  Beispiel : Pg(130)

```

[7, 9, √130], [3, 11, √130] (23)

Gerade Normen unter 200:

```

> e2 := 2·eI; seq(Pg(e2[i]), i=1..13);
e2 := [10, 26, 34, 58, 74, 82, 106, 122, 130, 146, 170, 178, 194]
[1, 3, √10], [1, 5, √26], [3, 5, √34], [3, 7, √58], [5, 7, √74], [1, 9, √82], [5, 9,
√106], [1, 11, √122], [7, 9, √130], [3, 11, √130], [5, 11, √146], [7, 11, √170], [1,
13, √170], [3, 13, √178], [5, 13, √194]

```

(24)