Lösungen II-8

1), 2), 3) sind Beweisaufgaben, siehe Übungen

4.), 5* b) Um Fixpunkte zu finden, muß man nach Fixvektoren im IR^3 mit letzter Komponente 1 suchen. Das sind Lösungen des
homogenen linearen Gleichungssystems (U - E)X = O, bzw. (S - E)X = O, wobei E =diag(1,1,1) die dreireihige Einheitsmatrix bezeichnet.

```
> with(linalg): A:=linalg[matrix](3,3,[3/5,-4/5,1, 4/5,3/5,-1,
  0,0,1]); S:=linalg[matrix](3,3,[3/5,4/5,-2/5, 4/5,-3/5,4/5,
  0,0,1]); A_E:=evalm(U-diag(1,1,1)); S_E:=evalm(S-diag(1,1,1));
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E := \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_E := \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-8}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> rankA_E:=rank(A_E); rankS_E:=rank(S_E);
```

$$rankA_E := 2$$

$$rankS_E := 1$$

```
> kernel(A_E); kernel(S_E);
```

$$\{[3, 1, 2]\}$$

$$\{[-1, 0, 1], [2, 1, 0]\}$$

Damit steht fest, daß A genau einen Fixpunkt P = (3/2,1/2 | 1) = [3/2,1/2] hat, während S die Gerade G durch die Punkte (-1,0 | 1) = [-1,0] und
(-1,0 | 1) + (2,1 | 0) = (1,1 | 1) = [1,1], also G: x - 2y + 1 = 0, punktweise fixiert. Da die Spalten von S orthonormiert sind, ist S eine Bewegungsmatrix,
die G punktweise fixiert. Das ist nur für die Spiegelung an G möglich.
Nach a) sind die Drehgruppen um O und P konjugiert. Nach dem Beweis (auch von 3 b)) wird diese Konjugation durch eine (beliebige) Bewegung U, die
O in P überführt, vermittelt. Man kann die Translation t: X |---> X + (3/2,1/2) verwenden also folgende Translationsmatrix U := IM(t):

```
> U:=linalg[matrix](3,3,[1,0,3/2, 0,1,1/2, 0,0,1]); `Drehmatrix um
  O:`; Do:=linalg[matrix](3,3,[3/5,-4/5,0, 4/5,3/5,0, 0,0,1]);
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Drehmatrix um O:

$$Do := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> `Konjugation:`; invU:=adj(U); `UDoU^(-1)`:=evalm(U&*Do&*invU);
  `stimmt mit A überein`;
```

Konjugation:

$$invU := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$UDoU^{(-1)} := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

stimmt mit A überein

>