**Serie II.5**

```
> with(linalg):
```

```
Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace
```

Aufgabe 1) Schritte:

a) Isotropie, euklidisch, negativ definit sind isometrisch invariante Eigenschaften;

b) (V,q) ist isometrisch zu genau einem Raum IR^p,n-p (Diagonalisierung);

c) IR^p,n-p ist isotrop gdw 0 < p < n (zu verifizieren);

d) IR^p,n-p ist euklidisch bzw. negative definit gdw p = n bzw. p = 0

Aufgabe 2)

Die symmetrischen Matrizen der zugehrigen homogenen Formen sind:

```
> Qa:=matrix([[1, 1, 0], [1, 1, 1], [0, 1, 3]]); Qb:=matrix([[1,
1, 1], [1, 1, 1], [1, 1, 0]]); Qc:=matrix([[0, 1, 2], [1, 1, 1],
[2, 1, -1]]); Qd:=matrix([[2, 1, 0], [1, 1, 1], [0, 1, 1]]); `Determinanten:`;
[det(Qa),det(Qb),det(Qc),det(Qd)];
```

$$Qa := \mathrm{matrix}([[1, 1, 0], [1, 1, 1], [0, 1, 3]])$$

$$Qb := \mathrm{matrix}([[1, 1, 1], [1, 1, 1], [1, 1, 0]])$$

$$Qc := \mathrm{matrix}([[0, 1, 2], [1, 1, 1], [2, 1, -1]])$$

$$Qd := \mathrm{matrix}([[2, 1, 0], [1, 1, 1], [0, 1, 1]])$$

$$\mathit{Determinanten} :$$

$$-1$$

$$[-1, 0, 1, -1]$$

b) ist entartet, die anderen nicht.

Die symmetrischen Matrizen der Hauptteile sind:

```
> qa:=matrix([[1, 1], [1, 1]]); qb:=matrix([[1, 1], [1, 1]]); qc:=matrix([[0,
1], [1, 1]]); qd:=matrix([[2, 1], [1, 1]]); `Determinanten:`; [det(qa),det(qb),det(qc),de
```

$$qa := \mathrm{matrix}([[1, 1], [1, 1]])$$

$$qb := \mathrm{matrix}([[1, 1], [1, 1]])$$

$$qc := \mathrm{matrix}([[0, 1], [1, 1]])$$

$$qd := \mathrm{matrix}([[2, 1], [1, 1]])$$

$$\mathit{Determinanten} :$$

$$[0, 0, -1, 1]$$

also ist a) parabolisch, c) hyperbolisch, d) elliptisch; letzteres, weil qc, qd nur zu diag(1,-1) bzw. diag(1,1) hnlich sein knnen, wegen der Determinanten

(gleiche negative bzw. positive Diskriminante).

3) x + y + 2 = 0 , x + y = 0 ;

Das Polynom zerfllt nmlich in das Produkt zweier linearer Polynome:

```
> factor(x^2+2*x*y+2*x+y^2+2*y);
```

$$(y + x + 2)\,(y + x)$$

4) x = y' +1, y = x' - y' -2,
invers:
x' = x + y +1, y' = x - 1
ist eine affine Koordinaten-Transformation mit der normalisierenden Eigenschaft
Ohne Translations-Konstanten: durch Diagonalisierung der Form qc mit symmetrischen Gau-Algorithmus,
Translations-Konstanten durch quadratische Ergnzung.

```
> `Probe fr Diagonalisierungsschritt:` ; expand(subs(x=Y,y=X-Y,2*x*y+y^2+4*x+2*y-1));
```

$$\mathit{Probe\ fr\ Diagonalisierungsschritt}:$$
$$-Y^2 + X^2 + 2\,Y + 2\,X - 1$$

5*) i) Es gengt zu zeigen, da jeweils ein nichttrivialer Vektor jeder Vektor-Geraden seine L
ii) Sei o /= a lngeninvariant, o /= b beliebig., z.z. b ist auch lngeninvariant. Fr b
o.B.d.A. genauso so lang wie a (wieder nach i)).
Dann betrachtet man den Rhombus, der von a, b aufgespannt wird. Die Diagonalen a+b, a-b sind orthogonal. Orthogonalitt
bleibt erhalten. Dann spannen die Bildvektoren a', b' wieder einen Rhombus auf. Also gilt —b'— = —a'— = —a— = —b—.
ii') benutzte Rhombus-Eigenschaft:
q(a) = q(b) gdw <a+b,a-b> = 0
ist offensichtlich.
Visualisierung der Kurven 2) a), b), c), d)
with(casa):

```
> with(plots): implicitplot( x^2+2*x*y+y^2+2*y+3 = 0,x=-1..6,y=-6..1,
color=blue);

> implicitplot( x^2+2*x*y+2*x+y^2+2*y = 0,x=-1..6,y=-6..1, color=blue);

> implicitplot( 4*x+2*x*y+y^2+2*y-1 = 0,x=-4..6,y=-6..2, color=blue);

> implicitplot( 2*x^2+2*x*y+y^2+2*y+1 = 0,x=0..4,y=-4..0, color=blue);
```