1.7 Lineare Ungleichungssysteme (LUGS) und lineare Optimierung

1.7.1 Definition

Als affine Hyperebene H im R^n bezeichnet man die Lösungsmenge einer einzelnen linearen Gleichung

$$\langle a, x\rangle = b$$

mit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n,\ b \in R$ und $a \neq o$ ist nicht der Nullvektor.
Anschaulich ist $H \subset R^n$ ein „schief" eingebetteter R^{n-1}.

Im Spezialfall $a = (0, \ldots, 0, 1),\ b = 0$ bedeutet $\langle a, x\rangle = b$ gerade $x_n = 0$. In diesem Fall ist $H = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\}$ der Lösungsraum.

1.7.2

Wir wissen schon: $H = p + TH$, wobei $p = Ra \cap H$ und $TH = a^{\perp}$ aus allen Vektoren besteht, die auf a senkrecht stehen.

Man kann zeigen: Die Gleichungen

$$\langle a, x\rangle = b$$

und

$$\langle a', x\rangle = b'$$

haben genau dann dieselbe Lösungsmenge, wenn

$$(a, b) = (a_1, \ldots, a_n, b)$$

und

$$(a', b') = (a'_1, \ldots, a'_n, b')$$

zeilenäquivalent sind, wenn also ein $\lambda \neq 0$ existiert, so daß $(a', b') = \lambda(a, b)$ gilt.

Umkehrung: In jeder Zeilenäquivalenzklasse gibt es genau eine Matrix mit reduzierten Zeilenstaffelung. Wenn

$$AX = B \text{ und } A'X = B'$$

beide in reduzierter Zeilenstaffelung vorliegen und dieselbe Lösungsmenge haben, so ist $(A \mid B) = (A' \mid B')$.

1.7.3 Satz

Die durch $\langle a, x\rangle = b$ gegebene Hyperebene H spaltet den R^n in zwei Halbräume:

$$H_a^+ = \{x \mid \langle a, x\rangle \geq b\},$$

$$H_a^- = \{x \mid \langle a, x\rangle \leq b\}.$$

Achtung: Die Gleichungen $\langle a, x\rangle = b$ und $\langle -a, x\rangle = -b$ haben den gleichen Lösungsraum H, jedoch ist $H_{-a}^+ = H_a^-$. Der Halbraum hängt also von der Wahl von a ab; H_a^+ ist die Seite von H in Richtung von a.

1.7.4 Definition und Satz

Ein LUGS vom Typ $m \times n$ ist ein System linearer Ungleichungen

$$\langle a_1, x\rangle \geq b_1$$

$$\dots$$

$$\langle a_m, x\rangle \geq b_m$$

mit $a_i = (a_{i1}, \dots a_{in} \in R^n,\ b : i \in R$. Die Lösungsmenge K des LUGS ist durch

$$K = H^+_{1,a_1} \cap \dots \cap H^+_{m,a_m} \subset R^n$$

gegeben, wobei H_i die Lösungsmenge von $\langle a_i, x\rangle = b_i$ ist.

Bemerkungen:
1. Da $\langle a_i, x\rangle \leq b_i$ und $\langle -a_i, x\rangle \geq -b_i$ gleichbedeutend sind, kann man in einem LUGS immer das Zeichen $\geq$ verwenden.
2. Das System

$$\langle a_i, x\rangle \leq b_i$$

$$\langle a_i, x\rangle \geq b_i$$

bedeutet

$$\langle a_i, x\rangle = b_i,$$

also ist jedes LGS ein Spezialfall eines LUGS.

1.7.5 Definition

Seien $p, q \in R^n$, dann bezeichnet

$$[p, q] = \{(1-\lambda)p + \lambda q;\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

die Verbindungsgerade zwischen p und q.
Anschaulich ist dies $p + \lambda(q - p)$, dabei ist $q - p$ der Verbindungsvektor.

Eine Teilmenge $K \subset R^n$ heißt konvex, falls mit $p, q \in K$ auch $[p, q] \subseteq K$ gilt.
(Das ist eine Abschwächung des Begriffs des affinen Raums: Dort muß mit zwei Punkten nicht nur deren Verbindungsstrecke, sondern die Verbindungsgerade enthalten sein.)

1.7.6 Satz

1. Jeder Halbraum H^+ ist konvex.
2. Der Durchschnitt jeder Familie konvexer Mengen ist konvex.
3. Die Lösungsmenge eines LUGS ist konvex (falls sie nicht leer ist).

Beweis: 1. Die Menge H^+ läßt sich als Lösungsmenge von $\langle a, x\rangle \geq b_i$ realisieren. Seien nun $p, q \in H^+$ und $0 \leq \lambda \leq 1$, also sind λ und $1 - \lambda$ nicht negativ. Aus $\langle a, p\rangle \geq b,\ \langle a, q\rangle \geq b$
folgt also $(1-\lambda)\langle a, p\rangle \geq (1-\lambda)b$ und $\lambda\langle a, q\rangle \geq \lambda b$ und dies ergibt $\langle a, (1-\lambda)p + \lambda q\rangle \geq b$.

2. Sei $K_i,\ i \in I$ eine Familie konvexer Teilmengen von R^n und $p, q \in \bigcap_{i\in I} K_i$. Dann gilt für alle i $p, q \in K_i$, daß $[p, q] \in K_i$ ist, also $[p, q] \in \bigcap_{i\in I} K_i$.

3. Die Lösungsmenge eiens LUGS ist Durchscnitt von Halbräumen, also konvex.

1.7.7 Definition und Satz

Sei $K \subset R^n$ eine konvexe Teilmenge. Mann nennt $p \in K$ einen **Extremalpunkt**, falls p folgende äquivalente Eigenschaften hat:
1. Wenn $p_1, p_2 \in K$ liegen, so ist p niemals innerer Punkt von $[p_1, p_2]$.
2. Wenn $p \in [p_1, p_2]$ ist, so ist $p = p_1$ oder $p = p_2$.
3. $K - \{p\}$ ist wieder konvex.

1. $\Leftrightarrow$ 2. ist klar.
1. $\rightarrow$ 3: Seien $p_1, p_2 \in K - p$. Wir betrachten $[p_1, p_2]$. Da p kein innerer Punkt dieser Strecke ist, gilt $[p_1, p_2] \in K - p$.
3. $\Rightarrow$ 1: Wenn $K - p$ konvex ist und $p_1, p_2 \in K - p$ liegen, so ist $[p_1, p_2] \subset K - p$, also kann p nicht innerer Punkt dieser Strecke sein.

Beispiele im R^2: a) Wir nehmen $K = H^+$, einen Halbraum. Dann hat K keineExtremalpunkte, denn $K - p$ ist niemals konvex.
b) Sei $K = H_1 \cap H_2$ der Durchschnitt zweier Halbräume, so daß K eine Ecke hat. Diese Ecke ist dann einExtremalpunkt.
Dies gilt auch für Durchschnitte mehrerer Halbräume.
Im R^n braucht man n Halbräume, um eine Ecke zu produzieren.
Im R^3 ist der Durchschnitt zweier Halbräume ein Zelt mit unendlich langer Dachkante, hier gibt es keine Ecken. Erst mit drei Halbräumen kann man eine Ecke herstellen.

1.7.8 Satz

Sei $K \subset R^n$ konvex und H die durch $\langle a, x\rangle = b$ gegebene affine Hyperebene. Weiter soll K die Hyperebene berühren, aber nicht durch sie hindurchgehen, d.h.

$$K' = K \cap H \neq \emptyset,\ K \subseteq H^+,$$

(K liegt auf einer Seite von H). Es sei p einExtrempunkt der konvexen Menge K'. Dann ist p auchExtrempunkt von K.
(Umgekehrt: Wenn p einExtrempunkt von K ist, der auch zu K' gehört, dann ist p auch einExtrempunkt von K'. Dies ist offensichtlich.)

Beweis: Sei p einExtrempunkt von K'. Wir nehmen an, p wäre keinExtrempunkt von K. Dann existiert eine Strecke $[p_1, p_2] \subset K$, die p als inneren Punkt hat. Wenn nun $p_1, p_2 \in K'$ wäre, erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung, daß p einExtrempunkt von K' ist. Sei also oBdA $p_1 \notin K'$, d.h. $p_1 \in K \subset H^+$, $p_1 \notin H$. Also gehört p_1 zu H^+, aber nicht zu H, also ist $\langle a, p_1\rangle > b$. Sei nun $p = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2$ mit $0 < \lambda < 1$ ein innerer Punkt. Dann ist

$$\langle a, p\rangle = \lambda\langle a, p_1\rangle + (1 - \lambda)\langle a, p_2\rangle,$$

das erste Produkt ist $> b$, das zweite $\geq b$, da $p_2 \in K \subseteq H^+$, also

$$\lambda(b+e) + (1-\lambda)b = b + \lambda e > b,$$

also $p \notin H$. Das widerspricht der Voraussetzung $p \in K' = K \cap H$. □

1.7.9 Satz

Sei $K \subset R^n$ der Lösungsraum eines LUGS, d.h. $K = h_1^+ \cap \cdots \cap H_m^+$ ist Durchschnitt von Halbräumen. Dann ist für ein $p \in K$ folgendes äquivalent:
1. p istExtrempunkt von K,
2. man findet n Inizes $i_1 < \cdots < i_n \in \{1, \ldots, m\}$, do daß p genau der Durchschnitt

$$H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_n} = \{p\}$$

der entsprechenden Hyperebenen ist.
3. Unter den Ungleichungen $\langle a_i, x \rangle = b_i$, welche den Hyperebenen H_i entsprechen, findes man n Stück, so daß p die Lösung des Gleichungssystems

$$\langle a_{i_k}, x \rangle = b_i, \; k = 1, \ldots, n$$

von Typ $n \times n$ ist.
4. Unter den Koeffizientenvektoren a_i findet man n Stck: $a_{i_i}, \ldots, a_{i_n}$, so daß die aus diesen (Zeilen-)Vektoren gebildete Matrix A invertierbar ist und

$$p = A^{-1} \begin{pmatrix} b_{i_i} \\ \vdots \\ b_{i_n} \end{pmatrix}$$

gilt.

Beweis: Wir zeigen nur die einfache Richtung 2. $\Rightarrow$ 1., d.h. wenn p eine Ecke von K ist, so ist p einExtrempunkt. Sei

$$K_0 = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_m}.$$

Weil K_0 nur aus dem Punkt $p \in K$ besteht, ist p eine Ecke von K_0. (Wir bemerken, daß eine einelementige Teilmenge natürlcih konvex ist.) Sei nun

$$K_1 = (H_{i_1}^+ \cap K) \cap \cdots \cap H_{i_n}.$$

Dann ist $p \in K_0 \subset K_1$ einExtrempunkt von $K_0 = H_{i_1} \cap K_1$ und aus 1.7.9 folgt, daß p auch einExtrempunkt von K_1 ist. Nun bilden wir

$$K_2 = (H_{i_1}^+ \cap K) \cap (H_{i_2}^+ \cap K) \cap \cdots \cap H_{i_n},$$

dann ist p einExtrempunkt von $H_{i_2} \cap K_2 = K_1$. Sukzessive schleißt man weiter und erhält schließlich: p istExtrempunkt von

$$K_n = (H_{i_1} \cap K) \cap \cdots \cap (H_{i_n}^+ \cap K) = (H_{i_1} \cap \cdots \cap (H_{i_n}^+) \cap K.$$

□

1.7.10 Ein Beispiel

Wir betrachten das LUGS vom Typ 5×2:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1 \leq 10$$

$$0,5x_1 + x_2 \leq 20$$

$$200x_1 + 100x_2 \leq 2400$$

Wir suchen dieExtrempunkte der Lösungsmenge. Dazu müssenwir aus den Koeffizientenvektoren Paare bilden, so daß die entsprechene Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{i_1} \\ a_{i_2} \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und das entsprechende LGS lösen. Von den 10 möglichen Paaren ist eins untauglich (zweimal (1,0)). In allen anderen Fällen erhält man jeweils eine eindeutig bestimmte Lösung, die aber nicht notwendigerweise zu K gehört, da eine solche Lösung p zwei Gleichungen genügt, aber evtl. die anderen drei Ungleichungen verletzt. Hier hat K insgesamt 5 Ecken.

Man hat so ein zwar umständliches, aber vollständiges Verfahren, um alleExtremalpunkte zu bestimmmen.

Beschränkte LUGS-Lösungsmengen

Sei $K \subset R^n$ eine konvexe Menge und sei $p(p,q)$ der Abstand zwischen p und q. Die Menge K heißt beschränkt, falls

$$\{d(p,q) \mid p,q \in K\} \leq S$$

ist.

1.7.11 Satz

Gegeben sei ein LUGS im R^n : $\langle a_i, x\rangle \geq b_i,\ i = 1,\dots,m$. Die Lösungsmenge $K = H_1^+ \cap \dots \cap H_m^+$ sei beschränkt und nicht leer. Dann gilt
1. K besitzt mindestens einenExtrempunkt.
2. Ist $\phi(x) = \langle c, x\rangle$ ein lineares Funktional, dann werden die Extremwerte von ϕ auf K in Extremalpunkten angenommen.

Beweis: 1. Wir zeigen, daß K einen Extremalpunkt besitzt. Sei $\phi_i(x) = \langle a_i, x\rangle$ und sei β_1 Minimalwert von ϕ_1 auf $K = K_0$. Dieser Wert wird angenommen, da K beschränkt und abgeschlossen ist. Es ist also $\phi_1(x) \geq \beta_1 \geq b_1$.
Sei $K_1 = K \cap \{x \mid \phi_1(x) = \beta_1\}$ und sei weiter K_i schon konstruiert. Sei β_{i+1} der Minimalwert von ϕ_{i+1} auf K_i. Dann setzen wir $K_{i+1} = K_i \cap \{x \mid \phi_{i+1} = \beta_{i+1}\}$.
Dann gilt: K_m ist die Lösungsmenge des LGS $\phi_1(x) = \beta_1, \dots, \phi_m(x) = \beta_m$. Sei p eine Lösung, dann ist $K_m = p + W$, wobei W der Lösungsraum des entsprechenden homogenen Systems ist. Wenn W nicht der Nullraum ist, so ist er unbeschränkt, also

ist auch K_m unbeschränkt. Da aber $K_m \subset K$ ist, so bleibt nur $K_m = \{p\}$. Offensichtlich ist p einExtrempunkt von K_m, also auch von K_{m-1}, ..., also auch von $K_0 = K$. Hier wird rückwärts wieder 1.7.8 angewandt.
2. Wir betrachten $\phi(x) = \langle c, x\rangle$ auf K. Die Menge K ist beschränkt und abgeschlossen und ϕ ist eine stetige Funktion, die nimmt also auf K ihre Extremwerte an. Sei β ein solcherExtremalpunkt. Wir betrachten die durch $\langle c, x\rangle = \beta$ gegebene Hyperebene H. Dann gilt auf ganz K: entweder $\langle c, x\rangle \geq \beta$ oder $\langle c, x\rangle \leq \beta$, also liegt K entweder in H_c^+ oder in H_c^-, d.h K berührt H, liegt aber auf einer Seite von H. Wir betrachten nun $K' = K \cap H$, diese Menge ist ebfalls beschränkt, besitzt also einenExtremalpunkt p, der nach 1.7.8 auchExtremalpunkt von K ist. Also nimmt $\phi(x)$ in p den Extremwert an.

Wir veranschaulichen noch den Beweis des 2. Teils:
Sei β irgendeine Zahl, dann bestimmt $\phi(x) = \langle c, x\rangle = \beta$ eine affine Hyperebene $H(\phi = \beta)$, der Vektor c steht darauf senkrecht. Wenn wir $H(\phi = \beta)$ in Richtung c verschieben, erhalten wir $H(\phi = \beta')$ mit $\beta' > \beta$. Wenn wir in Richtung $-c$ verschieben, so ergibt sich $H(\phi = \beta')$ mit $\beta' < \beta$. Nun nimmt ϕ auf K den Wert β an, wenn $H(\phi = \beta) \cap K \neq \emptyset$. Um einen Maximalwert von ϕ zu finden, schieben wir die Hyperebene bis ans äußerste Ende von K, also in eine Ecke. Dort wird ein Extremwert angenommen.

1.7.12 Anwendung auf Optimierungsprobleme

Gegeben sei ein LUGS $\langle a_i, x\rangle \geq b_i,\ i = 1, \dots, m$ und ein lineares Funktional $\phi(x) = \langle c, x\rangle$. Wir suchen die Extremwerte von $\phi(x)$ unter den durch das LUGS gegebenen Nebenbedingungen. Die Lösungsmenge K des LUGS bezeichnet man in diesem Zusammenhang auch als den Machbarkeitsbereich.
Wenn die Lösungsmenge K nicht beschränkt ist, so nimmt ϕ eventuell keinen Extremwert an.
Wir machen also folgende Schritte, um die Optimierungsaufgaben zu lösen:
1. Wir bestimmen die Ecken von K durch Lösen bestimmter LGS und Überprüfen der restlichen Bedingungen. 2
2. Wenn dieExtrempunkte $p_1, \dots, p_r$ von K gefunden sind, sind noch die Werte $\phi(p_i)$ zu kontrollieren. Falls K beschränkt ist, befindet sich unter diesen Werten der Extremwert.

1.7.13 Beispiel

Ein Landwirt hat 20 ha Land, maximal 10 Stellpltze für Kühe und bis zu 2400 Arbeitsstunden pro Jahr verfügbar. Eine Kuh erfordert pro Jahr 0,5 ha Land und 200 Arbeitsstunden und bringt 350,- Gewinn. Ein Hektar Weizen erfordert 100 Arbeitsstunden und bringt 260,- Gewinn. Mit wie vielen Kühen und wie viel Weizen mach der Landwirt maximalen Gewinn?
Sei x_1 die Zahl der Kühe und x_2 die Fläche des Weizenanbaus, Die Gewinnfunktion ist $\phi(x) = 350x_1 + 260x_2$. Wir nehmen an, daß man Kühe teilen könnte (wir arbeiten im R^2). Wir haben

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 \leq 10,\ 0,5x_1 + x_2 \leq 20,\ 200x_1 + 100x_2 \leq 2400.$$

DieExtrempunkte des Machbarkeitsbereichs K sind (0,0), (0,20), (10,0), (10,4), (8/3, 56/3). Der Maximalgewinn liegt bei 2,66 Kühen und 18,66 ha Weizen.